

TS. NÔNG QUỐC CHINH

TÔPÔ ĐẠI CƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Lời nói đầu

Giáo trình "Tôpô đại cương" trình bày những khái niệm cơ bản của Tôpô, cách xây dựng tôpô, phân loại các không gian tôpô, sự đồng phôi giữa các không gian tôpô và xét trường hợp riêng của không gian tôpô như không gian compac, không gian liên thông, không gian mêtric,.... Đây là những kiến thức cơ sở cần thiết cho nhiều lĩnh vực toán học khác nhau như Giải tích hàm, Lý thuyết độ đo và tích phân, Tôpô đại số, Hình học vi phân,....

Giáo trình được viết trên cơ sở những bài giảng cho sinh viên năm thứ 3 hệ Cử nhân ngành Toán và sinh viên hệ Sau đại học ngành Toán của khoa toán, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Giáo trình bao gồm 4 chương, trong mỗi chương có nêu nhiều ví dụ minh họa và có phần bài tập cơ bản để sinh viên tự giải.

Trong lần xuất bản đầu tiên này chắc rằng không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

TÁC GIẢ

Chương 0

NHỮNG KIẾN THỨC CƠ SỞ

§1. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP

1 Giao, hợp, hiệu

Đối với các tập con A, B, C của tập hợp X ta có:

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \text{ (Công thức De Morgan)}$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B), \text{ (Công thức De Morgan)}$$

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B),$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C),$$

$$X \setminus (A \setminus B) = B \cup (X \setminus A).$$

Giả sử $(A_i)_{i \in I}$ và $(B_k)_{k \in K}$ là hai họ những tập con tùy ý của tập hợp X . Khi đó:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ k \in K}} (A_i \cap B_k),$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{k \in K} B_k \right) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ k \in K}} (A_i \cup B_k),$$

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \quad (\text{Công thức De Morgan mở rộng})$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \quad (\text{Công thức De Morgan mở rộng})$$

2. Tích Đề các

Giả sử, X và Y là những tập hợp, $X \times Y$ là tích Đề các của chúng. Với $U_1, U_2 \subset X$ và $V_1, V_2 \subset Y$ ta có:

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

$$(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2) \subset (U_1 \cup U_2) \times (V_1 \cup V_2).$$

3. Ánh xạ

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$. Đối với bất kỳ $A, B \subset X$ ta có:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B).$$

Giả sử $(A_i)_{i \in I}$ là họ những tập con tùy ý của tập hợp X . Khi đó:

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

Đối với bất kỳ $M, N \subset Y$ ta có:

$$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N),$$

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N),$$

$$f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N),$$

$$f(f^{-1}(M)) = M \cap f(X),$$

Giả sử $(M_i)_{i \in I}$ là họ những tập con tùy ý của tập hợp Y . Khi đó:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i).$$

§2. QUAN HỆ THỨ TỰ

Quan hệ hai ngôi \leq trên tập hợp X được gọi là một quan hệ thứ tự nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

- a) Phản xạ: $x \leq x, \forall x \in X$.
- b) Phản đối xứng: $\forall x, y \in X$, nếu $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$.
- c) bắc cầu: $\forall x, y, z \in X$, nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$.

Tập hợp X đã trang bị một quan hệ thứ tự \leq được gọi là tập sắp thứ tự. Nếu $x \leq y$, ta nói x đứng trước y , hay x nhỏ hơn hoặc bằng y . Khi $x \leq y$ và $x \neq y$, ta sẽ viết $x < y$. Ta nói hai phần tử x và y trong X là so sánh được nếu $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Cho X là tập sắp thứ tự. Phần tử $a \in X$ được gọi là phần tử cực tiểu (tương ứng cực đại) trong X , nếu $\forall x \in X$, điều kiện $x \leq a$ (tương ứng $a \leq x$) kéo theo $x = a$. Trong một tập sắp thứ tự không nhất thiết phải luôn có phần tử cực tiểu (cực đại), và cũng có thể có nhiều phần tử cực tiểu (cực đại) khác nhau.

Giả sử $A \subset X$. Phần tử $a \in X$ được gọi là cận dưới (tương ứng cận trên) của tập A , nếu $\forall x \in A$, ta luôn có $a \leq x$ (tương ứng $x \leq a$). Nếu tập con $A \subset X$ có cận dưới (tương ứng cận trên) thì ta nói A bị chặn dưới (tương ứng chặn trên). Tập A được gọi là bị chặn (hay giới nội) nếu A đồng thời bị chặn dưới và bị chặn trên. Ta ký hiệu D_A là tập tất cả các cận dưới của A , ký hiệu T_A là tập tất cả các cận trên của A . Nếu $D_A \neq \emptyset$ và $a_0 \in D_A$ thỏa mãn $a \leq a_0 \forall a \in D_A$, thì a_0 được gọi là cận dưới đúng của tập A , ký hiệu là $a_0 = \inf A$. Tương tự, nếu $T_A \neq \emptyset$ và $a_0 \in T_A$ thỏa mãn $a_0 \leq a, \forall a \in T_A$ thì a_0 được gọi là cận trên đúng của tập A , ký hiệu là $a_0 = \sup A$. Phần tử $x_0 \in A$ được gọi là phần tử bé nhất (tương ứng lớn nhất) của A nếu $\forall x \in A$ luôn có $x_0 \leq x$ (tương ứng $x \leq x_0$).

Ta nói tập X được sắp thứ tự toàn phần (hay tuyến tính) nếu $\forall x, y \in X$ thì $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Khi đó ta cũng nói \leq là quan hệ thứ tự toàn phần trên X .

Giả sử X là tập sắp thứ tự toàn phần, với $a, b \in X$ tùy ý, $a \leq b$. Ta ký hiệu: $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$, và gọi là khoảng đóng với đầu mút trái là a , đầu mút phải là b .

$[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$, và gọi là khoảng mở bên phải, đóng bên trái.

$(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$, và gọi là khoảng đóng bên phải, mở bên trái.

$(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$, và gọi là khoảng mở trong X .

Tập sắp thứ tự toàn phần X được gọi là tập sắp thứ tự tốt nếu mọi tập con khác rỗng của X luôn có phần tử bé nhất.

Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự. Tập hợp tất cả các tập

con sắp thứ tự toàn phần của X với quan hệ bao hàm là một tập sắp thứ tự.

Mỗi phần tử cực đại của tập này được gọi là tập con sắp thứ tự toàn phần cực đại của tập hợp X .

§3. TIÊN ĐỀ CHỌN

Giả sử σ là một họ nào đó các tập hợp. Ta nói rằng họ σ có đặc trưng hữu hạn nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1) $\forall A \in \sigma$, nếu B là một tập con hữu hạn của A thì $B \in \sigma$.
- (2) Nếu A là một tập hợp thỏa mãn: mỗi tập con hữu hạn bất kỳ của A đều thuộc σ , thì $A \in \sigma$.

Định lý. Các điều kiện sau là tương đương:

(i) Cho tập hợp khác rỗng bất kỳ X . Đối với một họ tùy ý $(A_i)_{i \in I}$ những tập con khác rỗng của tập X , tồn tại hàm $f : I \rightarrow X$ sao cho $f(i) \in (A_i)$ với mọi $i \in I$.

(ii) Trên mỗi tập hợp tùy ý luôn tồn tại một quan hệ thứ tự tốt.

(iii) Mỗi một tập con sắp thứ tự toàn phần của tập hợp sắp thứ tự X luôn được chứa trong một tập con sắp thứ tự toàn phần cực đại.

(iv) Nếu họ σ các tập có đặc trưng hữu hạn thì mỗi phần tử của nó được chứa trong một phần tử cực đại xác định.

(v) Nếu mọi tập con sắp thứ tự toàn phần của tập sắp thứ tự X đều bị chặn trên, thì mỗi phần tử $x \in X$ luôn so sánh được với một phần tử cực đại nào đó của X .

Điều kiện (i) được gọi là tiên đề chọn.

Điều kiện (ii) được gọi là điều kiện Zermelo.

Điều kiện (iii) được gọi là điều kiện Hausdorff.

Điều kiện (iv) được gọi là điều kiện Tukey.

Điều kiện (v) được gọi là điều kiện Kuratowsky - Zorn.

Chương 1

KHÔNG GIAN MÊTRIC

§1. KHÔNG GIAN MÊTRIC, SỰ HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

1 Không gian mêtric

Định nghĩa 1.1 Không gian mêtric là một cặp (X, d) , trong đó X là một tập hợp, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên $X \times X$ thoả mãn các điều kiện sau:

1. Với mọi $x, y \in X : d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (tiên đề đồng nhất).
2. Với mọi $x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$, (tiên đề đối xứng)
3. Với mọi $x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (tiên đề tam giác).

Hàm d được gọi là mêtric trên X . Mỗi phần tử của X được gọi là một điểm của không gian X , số $d(x, y)$ được gọi là khoảng cách giữa hai điểm x và y .

Ví dụ 1.1

Tập hợp các số thực \mathbb{R} và tập hợp các số phức \mathbb{C} là những không gian mêtric, với mêtric $d(x, y) = |x - y|$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (hoặc \mathbb{C}).

Ví dụ 1.2

Tập hợp \mathbb{R}^k là không gian mêtric với mêtric d xác định như sau:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ với } x = (\xi_1, \dots, \xi_k), y = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Hiển nhiên d thoả mãn hai tiên đề đồng nhất và đối xứng. Ta kiểm tra tiên đề tam giác. Trước hết, để ý rằng nếu $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ là những số thực thì:

$$\sum_{i=1}^k |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^k |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Bất đẳng thức Côsi}).$$

Lấy tùy ý $x = (\xi_1, \dots, \xi_k), y = (\eta_1, \dots, \eta_k), z = (\zeta_1, \dots, \zeta_k) \in \mathbb{R}^k$. Khi đó

$$\begin{aligned} (d(x, y))^2 &= \sum_{i=1}^k |\xi_i - \zeta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^k (|\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i|)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i| |\eta_i - \zeta_i| + \sum_{i=1}^k |\eta_i - \zeta_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i|^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^k |\eta_i - \zeta_i|^2} + \sum_{i=1}^k |\eta_i - \zeta_i|^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k |\eta_i - \zeta_i|^2} \right)^2 = (d(x, y) + d(y, z))^2. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ta gọi d là mêtric Euclid và (\mathbb{R}^k, d) được gọi là không gian Euclid.

Ví dụ 1.3

Gọi $C[a, b]$ là tập hợp các hàm số thực liên tục trên khoảng đóng hữu hạn $[a, b]$. Dễ dàng chứng minh được rằng $C[a, b]$ là

một không gian mêtric với mêtric
$$d(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$
 với