XÂY DỰNG TOÁN TỬ BIÊN - MIỀN CHO MỘT BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG SONG ĐIỀU HOÀ

Lê Tùng Sơn *(Trường ĐH Sư phạm- ĐH Thái Nguyên)*

1. Đặt vấn đề

Một trong những phương pháp giải số mang tính hiệu quả cao đối với các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng cấp bốn là đưa chúng về một dãy các bài toán cấp hai và sử dụng các kết quả đã có. Để làm được việc này, gần đây, một số nhà nghiên cứu như Abramov, Ulijanova [1], Đ.Q.á [2,3,5],… đã áp dụng phương pháp toán tử biên hoặc toán tử biên – miền cho các bài toán đó. Các tính chất của toán tử cũng được xem xét, đánh giá, thông qua đó có thể kết luận được sự hội tụ của sơ đồ lặp của nghiệm xấp xỉ về nghiệm đúng của bài toán gốc.

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, chúng tôi xét bài toán

$$\Delta^2 u + bu = f, \qquad x \in \Omega, \qquad b > 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = g_1, \tag{2}$$

$$\Delta u\big|_{\Gamma_2} = g_2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}\bigg|_{\Gamma} = g_3, \tag{4}$$

trong đó Ω là một miền giới nội trong Rn, n≥2, Γ là biên đủ trơn của Ω, Γ= Γ1∪Γ2, γ là pháp tuyến ngoài của Γ, Δ là toán tử Laplace. Trước hết, chúng tôi đưa bài toán (1) – (4) về một phương trình toán tử, trên cơ sở đó, xây dựng một sơ đồ lặp cho bài toán gốc.

2. Đưa bài toán(1)-(4) về phương trình toán tử biên- miền

Nếu đặt:

$$\Delta u = v, \tag{5}$$

$$\varphi = -bu, \tag{6}$$

và ký hiệu: $$\Delta u\big|_{\Gamma_1} = v_0, \tag{7}$$

thì bài toán (1)-(4) được đưa về các bài toán:

$$\Delta v = f + \varphi, \qquad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$v\big|_{\Gamma_1} = v_0, \qquad v\big|_{\Gamma_2} = g_2 \qquad \text{và}$$

$$\Delta u = v, \tag{9}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = g_1, \ \frac{\partial u}{\partial \gamma}\bigg|_{\Gamma_2} = g_3.$$

Ở đây: *v*, v_0, φ là chưa biết. Nếu tìm được v_0, φ , thì từ (8) ta tìm được *v*, tiếp tục giải (9), ta tìm được nghiệm *u* của bài toán (1)- (4).

Để tìm v_0, φ, ta xây dựng toán tử B được xác định như sau:

$$B:\omega \quad \rightarrow \quad B\omega$$

$$\omega = \begin{pmatrix} v_0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \qquad B\omega = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{b\partial u}{\partial \gamma}\right|_{\Gamma_1} \\ \varphi + bu \end{pmatrix}, \tag{10}$$

trong đó u là nghiệm của các bài toán:

$$\Delta v = \varphi, \qquad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$v\big|_{\Gamma_1} = v_0, \qquad v\big|_{\Gamma_2} = 0$$

và:

$$\Delta u = v, \tag{12}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Nếu đặt $u = u_1+u_2$, $v = v_1+v_2$ thì ta đưa được (8), (9) tới dãy các bài toán dưới đây:

$$\Delta v_2 = f, \qquad x \in \Omega, \tag{13}$$

$$v_2\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad v_2\big|_{\Gamma_2} = g_2,$$

$$\Delta u_2 = v_2, \tag{14}$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = g_1, \ \left.\frac{\partial u_2}{\partial \gamma}\right|_{\Gamma_2} = g_3,$$

$$\Delta v_1 = \varphi, \qquad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$v_1\big|_{\Gamma_1} = v_0, \qquad v_1\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\Delta u_1 = v_1, \tag{16}$$

$$u_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \left.\frac{\partial u_1}{\partial \gamma}\right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Từ các bài toán (13),(14) ta tìm được u_2, v_2, từ (15), (16) và từ định nghĩa của B, ta có:

$$B\omega = \begin{pmatrix} b\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \gamma}\right|_{\Gamma_1} \\ \varphi + bu_1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Nếu u là nghiệm của bài toán (1)-(4), thì u phải thoả mãn các điều kiện:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_{\Gamma_1} = g_3$$

$$\varphi + bu = 0.$$

Từ đó ta có

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial\gamma}\Big|_{\Gamma_1}=g_3\Leftrightarrow\frac{\partial u_1}{\partial\gamma}\Big|_{\Gamma_1}=g_3-\frac{\partial u_2}{\partial\gamma}\Big|_{\Gamma_1}$$

$$\varphi+b(u_1+u_2)=0\Leftrightarrow\varphi+bu_1=-bu_2.$$

Vì vậy:

$$B\omega=\begin{pmatrix} b\left(g_3-\dfrac{\partial u_2}{\partial\gamma}\Big|_{\Gamma_1}\right)\\ -bu_2\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Đặt

$$F=\begin{pmatrix} b\left(g_3-\dfrac{\partial u_2}{\partial\gamma}\Big|_{\Gamma_1}\right)\\ -bu_2\end{pmatrix}, \tag{19}$$

ta có phương trình của toán tử B:

$$B\omega=F. \tag{20}$$

3. Xây dựng sơ đồ lặp cho bài toán (1) – (4)

Nhờ phương trình (20), ta có thể xây dựng một sơ đồ lặp cho bài toán (1)- (4) như sau:

1. Cho giá trị ban đầu của cặp $\omega^{(0)}=\left(v_0^{(0)},\varphi^{(0)}\right)$, (21)

2. Biết $\omega^{(k)}=\left(v_0^{(k)},\varphi^{(k)}\right)$, $k=0,1,...$ giải liên tiếp hai bài toán

$$\Delta v^{(k)}=f+\varphi^{(k)},\qquad x\in\Omega, \tag{22}$$

$$v^{(k)}\Big|_{\Gamma_1}=v_0^{(k)},\qquad v^{(k)}\Big|_{\Gamma_2}=g_2,$$

và

$$\Delta u^{(k)}=v^{(k)}, \tag{23}$$

$$u^{(k)}\Big|_{\Gamma_1}=g_1,\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial\gamma}\Big|_{\Gamma_2}=g_3.$$

4. Tính xấp xỉ mới của v_0 và φ

$$v_0^{(k+1)}=v_0^{(k)}-\tau_{k+1}b\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\gamma},\qquad x\in\Gamma_1, \tag{24}$$

$$\varphi^{(k+1)}=\varphi^{(k)}-\tau_{k+1}(\varphi^{(k)}+bu^{(k)},\qquad x\in\Omega, \tag{25}$$

Cần chú ý rằng quá trình lặp (21)- (25) là thể hiện của sơ đồ lặp hai lớp dưới đây :

$$\frac{\omega^{(k+1)}-\omega^{(k)}}{\tau_{k+1}}+B\omega^{(k)}=F \tag{26}$$

đối với phương trình toán tử (20), trong đó τ_{k+1} là tham số lặp đủ nhỏ. (xem [4]).

5. Kết luận

- Đã xây dựng được một toán tử biên – miền và đưa bài toán gốc (1) – (4) về phương trình toán tử của nó.

- Đã xây dựng được một sơ đồ lặp của nghiệm xấp xỉ của bài toán gốc thông qua phương trình toán tử.

- Nhờ các kết quả trên, trong thời gian tiếp theo, chúng tôi sẽ xem xét các tính chất của toán tử B và sử dụng kĩ thuật ngoại suy theo tham số cho bài toán(1) – (4), qua đó có thể lựa chọn giá trị của tham số ngoại suy sao cho sơ đồ lặp (21)-(25) hội tụ về nghiệm đúng của bài toán gốc (1) – (4)

Summary

Construction of mixed boundary- domain operator for a boundary value problem of the biharmonic type equation

By Le Tung Son

In this paper, we propose a method for constructing of mixed boundary- domain operator for a boundary value problem of the biharmonic type equation and constructing an iterative process for it. It is based on the reduction the BVP for differential equations of degree four to BVP for equations of degree two.

Tài liệu tham khảo

[1]. A.A. Abramov and V.I. Unijanova (1992), *On a method for solving biharmonic type equation with singularly small parameter*, J. Comput. Math. and Math. Phys. **32** (4) 567- 575 (Russian).

[2]. Dang Quang A (1994), *Boundary operator method for approximate solution of biharmonic type equation,* Vietnam Journal của Math.**22** (1-2) 114- 120.

[3]. Dang Quang A (1994), *Approximate method for solving an elliptic problem with discontinuous coefficients*, J. Comput. Appl. Math. **51**(2) (1994) 193- 203.

[4]. Dang Quang A (1993), *Accelerated methods for solving grid equations*, J. Comput. Sci. Cyber. **9** (2) (1993) 22- 32.

[5]. Dang Quang A (1998), *Mixed Boundary- domain Operator in Approximate Solution of Biharmonic Type Equation*, Vietnam Journal of Mathematics.**26**:3 (1998) 243- 252.

[6]. J. L. Lions and E. Magenes (1968), *Problemes aux Limites Non Homogenes et Application,* Vol. 1, Dunod, Paris.

[7]. A. Samarskij and E. Nikolaev (1989). *Numberical Methods for Grid Equations,* Vol. 2, Birkhauser, Basel.