

GIÁO TRÌNH

HÌNH HỌC VI PHÂN



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐỖ NGỌC DIỆP - NÔNG QUỐC CHINH

GIÁO TRÌNH
HÌNH HỌC VI PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

SÁCH ĐƯỢC XUẤT BẢN BỞI SỰ TÀI TRỢ CỦA DỰ ÁN GIÁO DỤC ĐẠI HỌC 2

Mục lục

Giới thiệu	7
1 Đường và mặt bậc hai	9
1.1 Siêu phẳng afin	9
1.1.1 Thuật khử Gauss-Jordan giải hệ phương trình tuyến tính	9
1.1.2 Đa tạp tuyến tính và phương pháp tọa độ .	10
1.1.3 Các phép biến đổi trong hình học	11
1.2 Đường bậc hai với phương trình chính tắc	12
1.2.1 Ellipse	12
1.2.2 Hyperbola	12
1.2.3 Parabola	13
1.3 Đưa phương trình đường bậc hai trong mặt phẳng về dạng chính tắc	13
1.4 Phân loại siêu mặt bậc 2 trong không gian 3 chiều .	14
1.5 Đưa phương trình mặt bậc hai tổng quát về dạng chính tắc	19
1.6 Phân loại đời hình các đường bậc hai trong mặt phẳng Euclid	21
1.7 Phân loại đời hình các mặt bậc hai trong không gian Euclid 3 chiều	21
1.8 Phương pháp tọa độ cong	22
1.8.1 Các đường bậc 2 tham số hoá	23
1.8.2 Các mặt bậc hai tham số hoá	23
1.9 Bài tập củng cố lý thuyết	24

2	Lý thuyết đường cong trong \mathbf{R}^n	25
2.1	Cung tham số hoá và cung chính quy	25
2.2	Độ dài đường cong trong \mathbf{R}^n . Đường trắc địa	27
2.3	Mục tiêu trực chuẩn. Mục tiêu Frénet. Độ cong. Độ xoắn.	30
2.4	Định lý cơ bản	33
2.5	Bài tập củng cố lý thuyết	36
3	Đại số tenơ, đại số ngoài, tenơ đối xứng	37
3.1	Tích tenơ các không gian véctơ	37
3.2	Tích ngoài và tích tenơ đối xứng	39
3.3	Đại số tenơ	40
3.4	Đại số ngoài	41
4	Lý thuyết mặt cong trong \mathbf{R}^3	43
4.1	Mảnh tham số hoá chính quy và mặt tham số hoá .	43
4.2	Mục tiêu Darboux của đường cong trên mặt đim . .	44
4.3	Dạng toàn phương cơ bản	45
4.4	Đạo hàm Weingarten và ký hiệu Christoffel	50
4.5	Đạo hàm thuận biến	53
4.6	Độ cong Riemann	55
4.7	Các định lý cơ bản của lý thuyết mặt đim	58
5	Đường cong trên mặt cong	61
5.1	Đường cong trên mặt	61
5.2	Độ cong pháp dạng và độ cong trắc địa của đường cong trên mặt	62
5.3	Phương chính và độ cong Gauss	64
5.4	Một số tính chất đặc trưng của đường trên mặt cong	65
5.5	Định lý Gauss -Bonnet	66
5.6	Bài tập củng cố lý thuyết	71

6	Định lý ánh xạ ngược và Định lý ánh xạ ẩn	73
6.1	Định nghĩa đạo ánh và các tính chất cơ bản	73
6.2	Đạo hàm riêng và vi phân	80
6.3	Định lý hàm (ánh xạ) ngược	83
6.4	Định lý hàm (ánh xạ) ẩn	85
6.5	Bổ các hàm trơn	86
6.6	Bài tập củng cố lý thuyết	89
7	Đa tạp khả vi	91
7.1	Định nghĩa. Ví dụ	91
7.2	Ánh xạ trơn giữa các đa tạp	93
7.3	Phân thớ tiếp xúc, đối tiếp xúc	94
	7.3.1 Không gian tiếp xúc. Phân thớ tiếp xúc . .	94
	7.3.2 Không gian đối tiếp xúc. Phân thớ đối tiếp xúc	96
7.4	Đa tạp con. Đa tạp thương	97
	7.4.1 Điều kiện chìm và điều kiện ngập	97
	7.4.2 Cấu trúc vi phân cảm sinh	99
	7.4.3 Định lý Godeman	100
	7.4.4 Ví dụ	101
7.5	Tôpô các đa tạp	101
7.6	Bài tập củng cố lý thuyết	102
7.7	Sơ lược về hình học Riemann tổng quát	103
7.8	Sơ lược về hình học symplectic tổng quát	103

Giới thiệu

Ở trường phổ thông, hình học được dạy và học theo quan điểm hình học Euclid. Các *vật thể hình học* được cấu thành từ các *mảnh phẳng* và *mảnh cầu*. Quan hệ so sánh giữa các vật thể hình học được thực hiện bởi các *phép dời hình*; hai vật thể hình học được xem là bằng nhau nếu chúng có thể được chồng khít lên nhau qua những phép dời hình.

Đại số tuyến tính và hình học giải tích xét các vật thể hình học được cấu thành từ các *mảnh phẳng* và các *mảnh bậc 2 tổng quát*. Các quan hệ so sánh được xét như các *phép biến đổi tuyến tính hoặc afin*. Các đường bậc hai được đưa về 9 dạng chính tắc, các mặt bậc hai trong không gian 3-chiều được đưa về 17 dạng chính tắc. Trong hình học đại số bằng phương pháp phân loại có thể nghiên cứu các đường và mặt hoặc siêu mặt bậc 3 hay, tổng quát hơn, bậc bất kì. Phép biến đổi cho phép là các *phép biến đổi đa thức hoặc song hữu tỉ*.

Quan điểm nói trên được phát triển trong cùng một ngữ cảnh của *hình học vi phân* khi mà các vật thể được cấu tạo từ các *mảnh tham số hoá* bằng các *toa độ địa phương*, mà nói chung các hàm toạ độ địa phương là các hàm trơn bất kì. Các phép biến đổi là các *phép vi phân*. Do vậy các vật thể hình học trong hình học vi phân đa dạng hơn, nhiều chiều hơn và theo một nghĩa nhất định là “trơn hơn” các vật thể hình học trong các môn hình học trên.

Phương pháp nghiên cứu của hình học vi phân tương đối đa dạng. Trước hết hình học vi phân sử dụng các phép tính vi phân và tích phân trong không gian Euclid \mathbf{R}^n để xây dựng các phép tính

vi phân và tích phân tương ứng trên các vật thể hình học. Đồng thời nó cũng vận dụng các phương pháp tôpô, tôpô đại số, phương pháp tổ hợp, phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng, để tìm ra các tính chất của các đối tượng hình học.

Giáo trình này được biên soạn trong khuôn khổ chương trình cho sinh viên các năm cuối đại học. Các tác giả đã dạy chương trình này cho các lớp của Đại học Huế, Đại học Thái nguyên, Đại học Quy Nhơn. Thực tế giảng dạy đã gợi ý cho các tác giả chọn lọc các nội dung này, sao cho vừa phải, không quá nhiều và cũng không quá nghèo nàn.

Giáo trình gồm có *các chương chính sau*: Chương 1 dành cho việc nhìn lại lý thuyết đường và mặt bậc 1 và 2. Mục đích của chương này là tạo ra một khởi điểm hình học cho việc học tiếp tục. Chương 2 được dành cho việc nghiên cứu các đường cong trong không gian Euclid n -chiều. Chương 3 được dành cho việc xây dựng lại khái niệm về tenzor và đại số tenzor. Chương 4 là chương trọng tâm, dành cho lý thuyết mặt cong trong không gian Euclid \mathbf{R}^3 . Trong chương 5 chúng tôi trình bày phép toán vi phân nhiều chiều cho các ánh xạ trơn, đồng thời nhấn mạnh các định lý ánh xạ ẩn và định lý ánh xạ ngược. Hai định lý này đóng vai trò trung tâm trong việc nghiên cứu các đa tạp con trong \mathbf{R}^n được xác định bởi hệ phương trình hàm. Trong chương 6 chúng tôi trình bày lý thuyết tổng quát các đa tạp khả vi. Đó chính là các đối tượng trung tâm của hình học vi phân.

Cuối mỗi chương có một số *bài tập bổ sung cho phần lý thuyết*. Các bài tập luyện tập cơ bản, cần được giảng viên chọn từ các nguồn khác. Giáo trình được biên soạn lần đầu không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp cho việc biên soạn, nội dung và hình thức của giáo trình.

Các tác giả

Chương 1

Đường và mặt bậc hai

Trong chương này chúng ta sẽ hệ thống hoá lại những khái niệm và kết quả nghiên cứu đường và mặt trong Đại số tuyến tính và Hình học giải tích dưới một cách nhìn thống nhất là tham số hoá và toạ độ hoá. Cách nhìn thống nhất này sẽ cho một hình dung sơ bộ về phương pháp nghiên cứu của hình học vi phân cổ điển.

1.1 Siêu phẳng afin

Trong Đại số tuyến tính, các siêu phẳng afin đóng vai trò cơ bản, các m -phẳng được xem như giao của hệ các siêu phẳng afin.

Trong hình học afin, siêu mặt afin là đối tượng cơ bản. Các giao của các siêu mặt bậc 2 cho ta các đối tượng kiểu các nhát cắt cầu, nhát cắt ellipsoid, v.v....

1.1.1 Thuật khử Gauss-Jordan giải hệ phương trình tuyến tính

Để giải hệ phương trình tuyến tính ta có thể sử dụng thuật khử Gauss-Jordan là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận của hệ phương trình đã cho. Chúng tôi cho rằng học viên đã biết kĩ về những vấn đề liên quan.