LINH HÓA TỬ CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG CẤP CAO NHẤT

Nguyễn Thị Ánh Hằng*

Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên

Tóm tắt. Cho R là một vành giao hoán Noether, $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R, M là R-môđun hữu hạn sinh. Kí hiệu $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$ là chiều đối đồng điều của M tương ứng với $\mathfrak{a}$, bài báo đưa ra một số tính chất của môđun con lớn nhất của M có chiều đối đồng điều tương ứng với $\mathfrak{a}$ nhỏ hơn $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$, kí hiệu là $T_R(\mathfrak{a}, M)$. Lọc chiều đồng điều tiếp cận qua phân tích nguyên sơ và đối đồng điều địa phương được tìm hiểu trong bài báo. Cuối cùng bài báo đưa ra một chứng minh chi tiết cho một kết quả về môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất của M với giá $\mathfrak{a}$, kết quả này cho ta công thức tính linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất của M với giá bất kì, cụ thể: Nếu M chiều d thỏa mãn $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = d$ thì

$$\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{Ann}_R(M/T_R(\mathfrak{a}, M)).$$

Từ khóa: *Đối đồng điều địa phương, chiều đối đồng điều, linh hóa tử, phân tích nguyên sơ, lọc chiều.*

1. Giới thiệu và chuẩn bị

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được giới thiệu đầu tiên bởi A. Grothendieck vào những năm 1960, sau đó được quan tâm nghiên cứu bởi rất nhiều nhà toán học trên thế giới như R. Hartshorne, M. Brodmann, J. Rotman, C. Huneke... Lý thuyết đối đồng điều địa phương đã có những ứng dụng to lớn trong nhiều lĩnh vực của toán học. Ngày nay nó trở thành công cụ không thể thiếu trong Đại số giao hoán, Hình học Đại số ...Trong nhiều ứng dụng của môđun đối đồng điều địa phương, các kết quả về linh hóa tử của các môđun này là chìa khóa cho việc chứng minh (xem [1], [3],[6]).

Năm 2014 trong một bài báo đăng trên tạp chí Arch Math (xem [1]) các tác giả A. Atazadeh, M. Sedghi và R. Naghipour đã trình bày một kết quả nghiên cứu về linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá bất kì trên một vành giao hoán Noether. Kết quả này là mở rộng kết quả của L.R. Lynch năm 2012 (xem [4]). Bài báo này đưa ra một số kết quả về môđun con có chiều đối đồng điều cao nhất để trình bày lại chứng minh của [1]. Trước hết ta nhắc lại một số kết quả về chiều đối đồng điều. Các kết quả về đối đồng điều được tham khảo theo cuốn sách [2] của M. Brodman và R.Y. Sharp. Các kết quả cơ bản khác trong Đại số giao hoán được tham khảo trong cuốn sách [5] của H. Matsumura. Ở đây, ta luôn giả thiết R là vành giao hoán Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh.

Định nghĩa 1.1. *Chiều đối đồng điều của M tương ứng với* $\mathfrak{a}$, kí hiệu là $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$, được định nghĩa như sau

$$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) := \sup\{i \in \mathbb{N} \mid H^i_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0\}.$$

Nhận xét 1.2. Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương thì $\mathrm{cd}(\mathfrak{m}, M) = \dim M$ và $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) \leq \dim M$.

Ví dụ 1.3. Ta có $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, E_R(R/\mathfrak{p})) = 0$ với mọi $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Trong đó $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của R và $E_R(R/\mathfrak{p})$ là bao nội xạ của $R/\mathfrak{p}$.

Kết quả sau được gọi là Định lý Gruson.

*Email. hangnthianh@gmail.com

Bổ đề 1.4 ([8], Định lý 4.1). *Cho M và N là hai R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó, nếu* $\mathrm{Supp}_R N \subseteq \mathrm{Supp}_R M$ *thì tồn tại xích hữu hạn các môđun con của N*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k = N$$

sao cho với mỗi $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ta có N_j/N_{j-1} là ảnh đồng cấu của tổng trực tiếp của các bản sao của M.

Ta có một số tính chất sau của chiều đối đồng điều.

Bổ đề 1.5. *Cho M và N là hai R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó nếu* $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$ *thì* $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. *Hơn nữa, nếu ta có* $\mathrm{Supp}(N) = \mathrm{Supp}(M)$ *thì* $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) = \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$.

Hệ quả 1.6. *Giả sử $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ là một dãy khớp ngắn các R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

$$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = \max\{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, L), \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N)\}.$$

Hệ quả 1.7. *Cho $\mathfrak{a}$ là iđêan của R. Khi đó*

$$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathrm{Ann}_R M) = \max\{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \min \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R M)\}.$$

2. Linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất

Mục này tìm hiểu về linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất. Kết quả sau mô tả môđun con có chiều đối đồng điều cao nhất. Tuy tương tự như chiều Krull (xem Mệnh đề 7.3.1 trong [2]) nhưng ở đây bài báo đưa ra một chứng minh chi tiết.

Mệnh đề 2.1. *Cho M khác 0 có chiều d. Đặt Ω là tập các môđun con N của M thỏa mãn* $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) < \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. *Khi đó*

(i) Trong Ω có phần tử lớn nhất, kí hiệu $T_R(\mathfrak{a}, M)$.

(ii) $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, G) = cd(\mathfrak{a}, M)$, *trong đó $G = M/T_R(\mathfrak{a}, M)$.*

(iii) G không có môđun con khác 0 nào có chiều đối đồng điều tương ứng với $\mathfrak{a}$ nhỏ hơn $cd(\mathfrak{a}, M)$.

(iv) $H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},G)}(G) \cong H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(M)$.

Chứng minh. (i) Ta có $\Omega \neq \emptyset$ vì $0 \in \Omega$. Vì R là vành Noether nên trong Ω có phần tử cực đại (theo quan hệ bao hàm) giả sử là N. Lấy $N' \in \Omega$ ta có

$$\mathrm{Supp}_R(N + N') \subseteq \mathrm{Supp}_R(N) \cup \mathrm{Supp}_R(N') \subseteq \mathrm{Supp}_R(M).$$

Với mọi iđêan $\mathfrak{p} \in \min \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R(N+N'))$ ta có $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R N)$ hoặc $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R N')$. Kéo theo $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) < \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. Do đó theo Hệ quả 1.7 ta có $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N + N') < \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. Vậy $N + N' \in \Omega$. Ta có $N \subseteq N + N'$ mà N là phần tử tối đại trong Ω nên $N' \subseteq N$. Vậy trong Ω có phần tử lớn nhất, kí hiệu $T_R(\mathfrak{a}, M)$. Khi đó

$$T_R(\mathfrak{a}, M) = \cup \left\{N \mid N \text{ là môđun con của } M \text{ và } \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) < \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)\right\}.$$

Đặt $G = M/T_R(\mathfrak{a}, M)$.

(ii) Xét dãy khớp $0 \longrightarrow T_R(\mathfrak{a}, M) \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow 0$ ta có

$$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = \max\{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, T_R(\mathfrak{a}, M)), \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, G)\}$$

mà $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, T_R(\mathfrak{a}, M)) < d$ nên $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, G) = cd(\mathfrak{a}, M)$.

(iii) Giả sử G có môđun con $L/T_R(\mathfrak{a}, M)$ thỏa mãn

$$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, L/T_R(\mathfrak{a}, M)) < cd(\mathfrak{a}, M),$$

trong đó L là môđun con của M chứa $T_R(\mathfrak{a}, M)$. Khi đó ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow T_R(\mathfrak{a}, M) \longrightarrow L \longrightarrow L/T_R(\mathfrak{a}, M) \longrightarrow 0,$$

và theo Hệ quả 1.6 suy ra $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, L) < cd(\mathfrak{a}, M)$. Điều này kéo theo $L \in \Omega$. Vậy $L \subseteq T_R(\mathfrak{a}, M)$ hay $L/T_R(\mathfrak{a}, M) = 0$.

(iv) Xét dãy khớp ngắn $0 \longrightarrow T_R(\mathfrak{a}, M) \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow 0$, dãy khớp này cảm sinh dãy khớp dài các môđun đối đồng điều

$$\cdots \to H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(T_R(\mathfrak{a}, M)) \to H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(M) \to H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(G) \to H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)+1}(T_R(\mathfrak{a}, M)) \to \dots.$$

Mà $H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(T_R(\mathfrak{a}, M)) = H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)+1}(T_R(\mathfrak{a}, M)) = 0$ nên $H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(G) \cong H_{\mathfrak{a}}^{cd(\mathfrak{a},M)}(M)$. □

Bổ đề 2.2. *Với $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R, đặt $A = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$. Giả sử $0 = \bigcap_j N_j$ là phân tích nguyên sơ của 0 trong M trong đó N_j là $\mathfrak{p}_j$-nguyên sơ. Khi đó $H_{\mathfrak{a}}^0(M) = \bigcap_{\mathfrak{p}_j \notin A} N_j$.*

Chứng minh. Ta có

$$H_{\mathfrak{a}}^0(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (0 \underset{M}{:} \mathfrak{a}^k) = (0 \underset{M}{:} \mathfrak{a}^n) = (\bigcap_j N_j \underset{M}{:} \mathfrak{a}^n) = \bigcap_j (N_j \underset{M}{:} \mathfrak{a}^n),$$

với n đủ lớn. Vì N_j là $\mathfrak{p}_j$-nguyên sơ nên $\mathfrak{p}_j = \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}\, M/N_j)$. Do đó tồn tại $n_j \in \mathbb{N}$ sao cho $\mathfrak{p}_j^{n_j} M \subseteq N_j$. Khi đó nếu $\mathfrak{p}_j \in A$ thì $\mathfrak{p}_j \supseteq \mathfrak{a}$ do đó $\mathfrak{a}^{n_j} M \subseteq N_j$ kéo theo $\mathfrak{a}^n M \subseteq N_j$ hay $(N_j \underset{M}{:} \mathfrak{a}^n) = M$. Mặt khác nếu $\mathfrak{p}_j \notin A$ thì $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_j$. Do đó tồn tại $x \in \mathfrak{a}$ là M/N_j-chính quy. Điều này kéo theo $(N_j \underset{M}{:} \mathfrak{a}^n) = N_j$. Vậy $H_{\mathfrak{a}}^0(M) = \bigcap_{\mathfrak{p}_j \notin A} N_j$. □

Từ kết quả trên ta thu được kết quả sau. Kết quả này là mở rộng khái niệm lọc chiều được nghiên cứu bởi P. Schenzel trong [7].

Mệnh đề 2.3. *Cho M khác 0 thỏa mãn $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = c$ và giả sử dãy $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_c$ là một dãy các môđun con của M sao cho với mỗi $0 \le i \le c$ ta có M_i là môđun con lớn nhất của M thỏa mãn $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M_i) \le i$. Khi đó*

$$M_i = H_{\mathfrak{a}_i}^0(M) = \bigcap_{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) > i} N_j,$$

trong đó $0 = \bigcap_{j=1}^n N_j$ là phân tích nguyên sơ tối tiểu của môđun con 0 của M và N_j là môđun con $\mathfrak{p}_j$-nguyên sơ của M với mọi $1 \le j \le n$ và $\mathfrak{a}_i = \prod_{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) \le i} \mathfrak{p}_j$.

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} A &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_j, \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) \le i\}. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.2 ta có $H_{\mathfrak{a}_i}^0(M) = \bigcap_{\mathfrak{p}_j \notin A} N_j = \bigcap_{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) > i} N_j$. Ta chứng minh $M_i = H_{\mathfrak{a}_i}^0(M)$. Lấy $x \in M_i$ vì $Rx \subseteq M_i$ nên theo Bổ đề 1.5 ta có $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, Rx) \le i$. Với mọi $\mathfrak{p} \in \min \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R\, Rx)$ theo Bổ đề 1.5 ta có $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) \le \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, Rx)$. Mặt khác vì $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(Rx) \subseteq \mathrm{Ass}_R M$ nên tồn tại $1 \le j \le n$ sao cho $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}$. Do đó ta có

$$\mathfrak{a}_i \subseteq \bigcap_{\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) \le i} \mathfrak{p}_j \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \min \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R(Rx))} \mathfrak{p} = \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R(Rx)).$$

Do đó tồn tại $n_i \ge 1$ thỏa mãn $\mathfrak{a}_i^{n_i} \subseteq \mathrm{Ann}_R(Rx)$. Điều này kéo theo $\mathfrak{a}^{n_i} x = 0$. Suy ra $x \in H_{\mathfrak{a}_i}^0(M)$. Vì vậy $M_i \subseteq H_{\mathfrak{a}_i}^0(M)$. Mặt khác vì $\mathrm{Supp}\, H_{\mathfrak{a}_i}^0(M) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a}_i)$ nên với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} H^0_{\mathfrak{a}_i}(M)$ tồn tai $j \geq 1$ thỏa mãn $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$ và $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) \leq i$. Hơn nữa vì $\operatorname{Supp} R/\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Supp} R/\mathfrak{p}_j$ nên theo Bổ đề 1.5 ta có $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) \leq \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) \leq i$. Theo Hệ quả 1.7 ta có $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, H^0_{\mathfrak{a}_i}(M)) \leq i$. Theo tính tối đại của $M_i$nên $M_i = H^0_{\mathfrak{a}}(M)$. □

Nhận xét 2.4. Với những kí hiệu như trên ta có $T_R(\mathfrak{a}, M) = M_{c-1}$ và

$$T_R(\mathfrak{a}, M) = H^0_{\mathfrak{b}}(M) = \bigcap_{\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) = c} N_j,$$

với $\mathfrak{b} = \prod_{\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}_j) \neq c} \mathfrak{p}_j$.

Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương thì $T_R(\mathfrak{m}, M)$ chính là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn $\dim_R M$ và được kí hiệu là $U_M(0)$.

Định lý dưới đây trình bày lại chứng minh của Định lý 2.3 trong [1] theo cách tiếp cận mới vừa nêu ở trên. Định lý đưa ra công thức tính linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá bất kì.

Định lý 2.5. *Cho M chiều d thỏa mãn* $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, M) = d$. *Khi đó*

$$\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \operatorname{Ann}_R(M/T_R(\mathfrak{a}, M)).$$

Chứng minh. Từ dãy khớp

$$0 \longrightarrow T_R(\mathfrak{a}, M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T_R(\mathfrak{a}, M) \longrightarrow 0$$

ta có $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, M/T_R(\mathfrak{a}, M)) = d$ và $H^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^d_{\mathfrak{a}}(M/T_R(\mathfrak{a}, M))$. Suy ra để chứng minh định lí ta chứng minh $\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M/T_R(\mathfrak{a}, M))) = \operatorname{Ann}_R(M/T_R(\mathfrak{a}, M))$. Đặt $G = M/T_R(\mathfrak{a}, M)$ ta có $T_R(\mathfrak{a}, G) = 0$. Do vậy không mất tính tổng quát giả sử $T_R(\mathfrak{a}, M) = 0$ và chứng minh $\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \operatorname{Ann}_R(M)$. Ta luôn có bao hàm thức $\operatorname{Ann}_R(M) \subseteq \operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M))$. Để chứng minh bao hàm thức ngược lại ta chứng minh $\operatorname{Ann}_{R/\operatorname{Ann}_R(M)}(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$. Tức là chứng minh $\operatorname{Ann}_{R/\operatorname{Ann}_R(M)}(H^d_{\mathfrak{a}(R/\operatorname{Ann}_R(M))}(M)) = 0$. Vì $M, R/\operatorname{Ann}_R(M)$ là các môđun hữu hạn sinh nên

$$\operatorname{Supp}_R(R/\operatorname{Ann}_R(M)) = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R(M)) = \operatorname{Supp}_R(M),$$

theo Bổ đề 1.5 ta có $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\operatorname{Ann}_R(M)) = \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, M) = \dim M = \dim R/\operatorname{Ann}_R(M) = d$. Do đó ta giả sử $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R) = d = \dim R$, $\operatorname{Ann}_R(M) = 0$ và chứng minh $\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$. Trước hết ta chứng minh với mọi phần tử $x \in \operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M))$ thì $H^d_{\mathfrak{a}}(xM) = 0$. Theo Định lý chuyển phẳng (xem [2], Định lý 4.3.2) ta có

$$H^d_{\mathfrak{a}}(xM) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}), \text{với mọi } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R).$$

Do đó ta cần chứng minh $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) = 0$. Thật vậy, nếu $\dim_{R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) < d$ thì theo Đinh lý triệt tiêu của Grothendieck (xem [2], Định lý 6.1.2) ta có $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) = 0$. Nếu $\dim_{R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) = d$ ta có

$$d = \dim_{R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) \leq \dim_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \dim_R(M) = d.$$

Suy ra $\dim_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = d$. Nếu $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$ thì $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) < d$ kéo theo $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}, xM_{\mathfrak{p}}) < d$, tức $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) = 0$, do đó ta giả sử $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, ta có $xH^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$ khi và chỉ khi $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) = 0$ nên $H^d_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(xM_{\mathfrak{p}}) = 0$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ kéo theo $H^d_{\mathfrak{a}}(xM) = 0$. Khẳng định được chứng minh. Từ đó $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, xM) < d$ mà $T_R(\mathfrak{a}, M) = 0$ kéo theo $xM = 0$, suy ra $x \in \operatorname{Ann}_R(M) = 0$. Vậy $x = 0$. □

Hệ quả 2.6. *(i) Giả sử M khác 0 thỏa mãn* $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = d = \dim M$. *Khi đó*

$$\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{Ann}_R(M/H^0_{\mathfrak{b}}(M)) = \mathrm{Ann}_R(M/\bigcap_{\mathrm{cd}(\mathfrak{a},R/\mathfrak{p}_j)=d} N_j),$$

trong đó $0 = \bigcap_{j=1}^n N_j$ *là phân tích nguyên sơ tối tiểu của môđun con 0 của* M, N_j *là môđun con* $\mathfrak{p}_j$*-nguyên sơ của* M *với mọi* $1 \leq j \leq n$ *và* $\mathfrak{b} = \prod_{\mathrm{cd}(\mathfrak{a},R/\mathfrak{p}_j)\neq d} \mathfrak{p}_j$.

(ii) Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ *là vành địa phương và* $\dim M = d$. *Khi đó*

$$\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = \mathrm{Ann}_R\, M/U_M(0).$$

Chứng minh. (i) Theo Mệnh đề 2.3 và Định lý 2.5 ta có điều phải chứng minh.

(ii)Vì $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương nên $\mathrm{cd}(\mathfrak{m}, M) = \dim M$. Áp dụng Định lý 2.5 ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 2.7. *Giả sử* $\dim R = d$ *và* $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R) = d$. *Khi đó*

$$\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(R)) = T_R(\mathfrak{a}, R).$$

Chứng minh. Theo Định lý 2.5 ta có $\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(R)) = \mathrm{Ann}_R(R/T_R(\mathfrak{a}, R))$. Hơn nữa ta lại có $\mathrm{Ann}_R(R/T_R(\mathfrak{a}, R)) = T_R(\mathfrak{a}, R)$. Vậy $\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(R)) = T_R(\mathfrak{a}, R)$. □

Hệ quả 2.8. *Giả sử* $\dim M = d$ *và* $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = d$. *Khi đó*

(i) $\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{Ann}_R(M)$ *nếu ta có*

$$\mathrm{Ass}_R\, M \subseteq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R\, M \mid \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) = d\}.$$

(ii) $\mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M))) = \mathrm{Supp}_R(M/T_R(\mathfrak{a}, M))$.

Chứng minh. (i) Theo giả thiết và Nhận xét 2.4 ta có $T_R(\mathfrak{a}, M) = 0$. Do đó theo Định lý 2.5 ta có điều phải chứng minh.

(ii) Theo Định lý 2.5 ta có

$$\mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M))) = \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}_R\, M/T_R(\mathfrak{a}, M)) = \mathrm{Supp}_R(M/T_R(\mathfrak{a}, M)).$$

Hệ quả được chứng minh. □

Ghi chú: Bài báo được tài trợ bởi Đề tài nghiên cứu khoa học công nghệ cấp Bộ mã số B2016-TNA-19.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Atazadeh, M. Sedghi and R. Naghipour (2014), "On the annihilators and attached primes of top local cohomology modules", *Arch. Math.*, **102**, pp. 225–236.

[2] M. Brodmann and R. Y. Sharp (1998), *Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press.

[3] M. Brodmann and R. Y. Sharp (2002), "On the dimension and multiplicity of local cohomology modules", *Nagoya Math. J.*, **167**, pp. 217–233.

[4] L. R. Lynch (2012), "Annihilators of top local cohomolgy", *Comm. Algebra*, **40**, pp 542–551.

[5] H. Matsumura (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

[6] L. T. Nhan and T. N. An (2009), "On the unmixedness and the universal catenaricity of local rings and local cohomology modules", *J. Algebra*, **321**, pp. 303–311. and completion", *J. Algebra*, **420**, pp. 475–485

[7] P. Schenzel (1998), "On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules", *In: Proc. of the Ferrara meeting in honour of Mario Fiorentini, University of Antwerp Wilrijk, Belgium*, pp. 245-264.

[8] W. Vasconcelos (1974), *Divisor theory in modules category*, North-Holland, Amsterdam

ABSTRACT

ANNIHILATORS OF TOP LOCAL COHOMOLOGY MODULES

Nguyen Thi Anh Hang *

Thai Nguyen University of Education

Let R be a commutative Noetherian ring, $\mathfrak{a}$ an ideal of R and let M be a finitely generated R-module. Denoted by $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$ the cohomological dimension of M with respect to $\mathfrak{a}$, the paper gives some properties of the largest submodule of M of cohomological dimension less than $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$ denoted by $T_R(\mathfrak{a}, M)$. Cohomological dimension filtration is approached through primary decompostion and local cohomology modules is studied in this paper. Finally, the paper gives a detail proof of annihilator of top local cohomology module of M with respect to $\mathfrak{a}$, this result gives us a formula to compute the annihilator of top local cohomology modules of M: If M be a finitely generated R-modules with dimension d such that $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = d$ then

$$\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{Ann}_R(M/T_R(\mathfrak{a}, M)).$$

Key words: *Local cohomology, cohomological dimension, annihilator, primary decompostion, dimension filtration.*

*Email: hangnthianh@gmail.com

Ngày nhận bài:; Ngày phản biện:; Ngày duyệt đăng: