# THÊM ĐIỀU KIỆN ĐỂ XẢY RA ĐẲNG THỨC NĂNG LƯỢNG CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER – STOKES

*Ngô Văn Giang* – Nguyễn Thị Minh Ngọc*
*Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên*

**Tóm tắt**

Đẳng thức năng lượng

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2$$

là một vấn đề mở cho phương trình Navier – Stokes. Có nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm và nghiên cứu về vấn đề này. Chúng ta biết rằng đẳng thức năng lượng sẽ xảy ra đối với nghiệm mạnh của phương trình Navier - Stokes. Tuy nhiên, với nghiệm yếu thì điều đó lại là vấn đề mở. Mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu thêm những điều kiện để xảy ra đẳng thức năng lượng. Bằng cách sử dụng định lý nội suy và các bất đẳng thức thông dụng, chúng tôi chứng minh được rằng: nếu thêm điều kiện nghiệm yếu *u* thuộc lớp hàm

$$L^2(H^{1.2}) \cap L^4(H^{0.65})$$

thì đẳng thức năng lượng sẽ xảy ra. Đây cũng là kết quả cải thiện so với các kết quả về nghiệm yếu thuộc lớp Serrin với chỉ số Serrin bằng 5/4.

**Từ khóa:** phương trình Navier – Stokes, nghiệm yếu, đẳng thức năng lượng, bất đẳng thức năng lượng, chỉ số Serrin.

## 1. Giới thiệu

Chúng ta xét hệ phương trình Navier – Stokes với điều kiện ban đầu $u_0$ và ngoại lực $f = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ trong } \Omega^T = (0,T) \times \Omega \\ div(u) = 0 \text{ trong } \Omega^T \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ trong } \Omega \end{cases}$$

trong đó $\Omega$ là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$.

Bây giờ, chúng ta nhắc lại khái niệm nghiệm yếu của phương trình Navier – Stokes

***Định nghĩa:*** *Một trường vectơ*

$$u \in L^\infty\left(0,T;\ L^2_\sigma(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;\ H^1_0(\Omega)\right)$$

*được gọi là nghiệm yếu của phương trình Navier – Stokes nếu đẳng thức*

$$-(u, w_t)_{\Omega,T} + (\nabla u, \nabla w)_{\Omega,T} - (u \cdot u, \nabla w)_{\Omega,T} = \left(u_0, w(0)\right)_\Omega$$

*đúng với mọi hàm thử* $w \in C_0^\infty\left(0,T;\ C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)\right)$.

Trong định nghĩa này, $(\cdot,\cdot)_\Omega$ có nghĩa là tích vô hướng trong $\Omega$. Tức là

$$(f,g)_\Omega := \int_\Omega f \cdot g\, dx$$

**Tel:0979343995.Email: ngogiangtcn@gmail.com*

và

$$(f,g)_{\Omega,T} := \int_0^T \int_\Omega f \cdot g\, dx\, dt$$

Leray[3] và Hopf [2] chỉ ra sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình Navier – Stokes thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2$$

với mọi $t \in [0,T)$

Tuy nhiên, đẳng thức năng lượng cho nghiệm yếu là vấn đề mở.

Serrin [5] chỉ ra rằng nếu một nghiệm yếu $u$ thuộc vào lớp $L^s(0,T;\ L^q(\Omega)), q > 3, s > 4$ với

$$\frac{3}{q} + \frac{2}{s} \le 1$$

thì đẳng thức năng lượng xảy ra. Chúng ta đã biết rằng nghiệm yếu

$$u \in L^2(H^1) \subset L^2(L^6), \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{2}{2} + \frac{3}{6} = 1.5,$$

lớp không gian này rộng hơn lớp không gian của Serrin.

Shinbrot [6] chỉ ra rằng nếu nghiệm yếu

$$u \in L^s(0,T;\ L^q(\Omega)), s > 2, q \ge 4$$

với $\frac{2}{q} + \frac{2}{s} \le 1$ thì đẳng thức xảy ra.

Sau đó, Sohr[7] chứng minh được nếu

$$u u \in L^2_{loc}(0,T;\ L^2(\Omega)),$$

$$u \in L^4(0,T;\ L^4(\Omega)), \qquad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

thì cũng xảy ra đẳng thức năng lượng.

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng đẳng thức năng lượng vẫn xảy ra nếu ta thêm điều kiện $u \in L^2(H^{1.2}) \cap L^4(H^{0.65})$.

Ở đây, $u \in L^2(H^{1.2})$, chỉ số Serrin là

$$S_1 = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} - 1.2 = 1.3 > \frac{5}{4}$$

và $u \in L^4(H^{0.65})$, chỉ số Serrin là

$$S_2 = \frac{2}{4} + \frac{3}{2} - 0.65 = 1.35 > \frac{5}{4}.$$

## 2. Kết quả chính

***2.1. Bổ đề:*** *Cho $u \in L^2(H^s)$ và $u^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \in L^2(H^{-2\varepsilon.s})$. Khi đó ta có $u \in L(0,T;\ H)$ và $\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle$.*

Đây là hệ quả trực tiếp từ Định lý 3.1 của L.Lions và E.Magenes, với $X = H^s, Y = H^{-2\varepsilon.s}$, xem [4]. Trong đó, $\langle u', u\rangle$ nghĩa là sự tác động của $u'$ lên $u$.

***2.2. Định lý:*** *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ là một miền, $u$ là một nghiệm của phương trình Navier – Stokes. Giả sử*

$$u \in L^2(H^{1.2}) \cap L^4(H^{0.65})$$

*thì ta có $u \in C(0,T;\ H)$ và đẳng thức năng lượng xảy ra*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2$$

*với mọi $t \in [0,T)$*

**Chứng minh:** Từ phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u = 0$$

thực hiện phép biến đổi Fourier hai vế ta được

$$\tau\hat{u}(\tau) = \Delta\hat{u}(\tau) - \widehat{u\cdot\nabla u}(\tau)$$

$$\Rightarrow \tau^{\varepsilon+\frac{1}{2}}\cdot\hat{u}(\tau) = \tau^{\varepsilon-\frac{1}{2}}\Delta\hat{u}(\tau) - \tau^{\varepsilon-\frac{1}{2}}\widehat{u\cdot\nabla u}(\tau) \quad (1)$$

Xét

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{\varepsilon-\frac{1}{2}}\cdot\left\|\widehat{u\cdot\nabla u}(\tau)\right\|^2_{H^{-2.4\varepsilon}} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\tau|^{1-2\varepsilon}}\cdot\left\|\widehat{u\cdot\nabla u}(\tau)\right\|^2_{H^{-2.4\varepsilon}} d\tau$$

$$\leq C_0\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{|\tau|^{1+a}}$$

$$+C_1\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\widehat{u\cdot\nabla u}(\tau)\right\|^{\frac{2(1+a)}{a+2\varepsilon}}_{H^{-2.4\varepsilon}} d\tau \quad (a \geq 0)$$

Sử dụng định lý nhúng, bất đẳng thức Holder ta có

$$\|u\cdot\nabla u\|_{L^p} \geq \left\|\widehat{u\cdot\nabla u}\right\|_{H^{-2\varepsilon}} \quad \left(\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{2.4\varepsilon}{3}\right)$$

$$\|u\cdot\nabla u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^{p_1}}\cdot\|u\|_{L^{p_2}}$$

$$\left(\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} + \frac{2.4\varepsilon}{3}\right)$$

$$\|u\|_{L^{p_1}} \leq \|u\|_{H^{\frac{5}{4}-1.2\varepsilon}} \quad \left(\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{4}-1.2\varepsilon}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_2} = \frac{5}{12} + 0.4\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\nabla u\|_{L^{p_2}} \leq \|u\|_{W^{1,p_2}} \leq \|u\|_{W^{\frac{5}{4}-1.2\varepsilon,2}}$$

$$= \|u\|_{H^{\frac{5}{4}-1.2\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \left\|\widehat{u\cdot\nabla u}\right\|_{H^{-2.4\varepsilon}} \leq \|u\|^2_{H^{\frac{5}{4}-1.2\varepsilon}}$$

Cho $\varepsilon \to \frac{1}{2} = 0.5$

$$\Rightarrow \left\|\widehat{u\cdot\nabla u}\right\|^2_{H^{-1.2}} \leq \|u\|^4_{H^{0.65}}$$

Từ giả thiết $u \in L^4(H^{0.65})$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\widehat{u\cdot\nabla u}\right\|^{\frac{2(1+a)}{a+2\varepsilon}}_{H^{-2.4\varepsilon}} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\widehat{u\cdot\nabla u}\right\|^2_{H^{-1.2}} d\tau < \infty$$

$$\left(\tau^{\varepsilon-\frac{1}{2}}\widehat{u\cdot\nabla u} \in L^2(H^{-1.2})\right)$$

Ta có $u \in L^2(H^{1.2})$

$$\Rightarrow \Delta u \in L^2(H^{-0.8}) \subset L^2(H^{-1.2})$$

Do đó từ (1) ta suy ra

$$\tau^{\varepsilon+\frac{1}{2}}\hat{u}(\tau) \in L^2(H^{-1.2}).$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 với $s = 1.2$; $\varepsilon = 0.5$ta có $u \in C(0,T;\ H)$.

Bây giờ nhân hai vế của phương trình đầu của hệ phương trình Navier – Stokes với u, sau đó sử dụng Bổ đề 2.1 ta được

$$\frac{1}{2}\|u(\tau)\|_2^2 - \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2$$

Định lý được chứng minh.

**Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp trong đề tài mã số T2016-72.

**Tài liệu tham khảo**

1. P. Constantin, C. Foias, (1988), "Navier - Stokes Equations", *Chicago Lect. Math. Univ of Chicago Press. Chicago.*

2. E. Hopf, (1951), "Uber Die Anfangwertaufgaben fur Die Hydromischen Grundgleichungen", *Math. Nachr. 4, 213 – 231.*

3. J Leray, (1934), "Sur le Mouvement D'un

Liquide Visqueux Emplissant L'espace", *Acta Math 63, 193 – 248.*

4. J.L. Lions and E. Magenes, (1972) "Non - Homogeneous boundary value problems and applications", *Sprınger.*

5. J. Serrin, (1963), "The initial value problem for the Navier–Stokes equations". *In Nonlinear Problems. Proc. Sympos. Madison, p.p 69-98.*

6. M. Shinbrot, (1974), "The Energy Equation

for The Navier – Stokes System", *SIAM J. Math. Anal. 5, 948 – 954.*

7. H. Sohr, (2001), "The Navier – Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach", *Springer Basel.*

## ON THE REGUARITY OF THE WEAK SOLUTION FOR THE NAVIER- STOKES EQUATIONS INVOLVING GRADIENT OF VELOCITY COPONENT.

*Ngo Van Giang* – Nguyen Thi Minh Ngoc*
*Thai Nguyen University of Technology*

**ABSTRACT**

In this paper, we consider the classical three – dimensional incompressible Navier – Stokes equations in space $\mathbb{R}^3$. The energy equality

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2$$

is an open problem for the Navier-Stokes equations. We know that the energy equality holds with the strong solution. However, with weak solutions, it is open . Here, we demonstrate that the energy equation happens if we add conditions

$$u \in L^2(H^{1,2}) \cap L^4(H^{0.65})$$

This is also the result of the improvement of the energy equilibrium condition compared with the Serrin class solution with the serrin index equal to 5/4

**Keywords:** Navier – Stokes equations, , weak solution, energy equality, energy inequality, Serrin index.

***Ngày nhận bài: 07/8/2017; Ngày phản biện: 07/9/2017; Ngày duyệt đăng: 30/11/2017***