ĐỊNH LÝ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM KHÁC KHÔNG CỦA BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI TOÁN TỬ BAOUEDI – GOULAOUIC

Mông Thị Nguyệt*, Nông Thị Thêm
Trường Trung học Phổ thông Thái Nguyên – Trường Đại học Sư phạm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài toán biên luôn là chủ đề nghiên cứu được nhiều nhà khoa học quan tâm bởi những ứng dụng của nó trong các ngành vật lý, hóa học. Đặc biệt, việc nghiên cứu những bài toán biên chứa toán tử elliptic suy biến, việc chỉ ra điều kiện tồn tại nghiệm, điều kiện không tồn tại nghiệm của bài toán là khó, phức tạp. Kết quả đạt được có ý nghĩa quan trọng trong việc phát triển lý thuyết toán học. Trong bài báo này, chúng tôi chỉ ra điều kiện không tồn tại nghiệm của bài toán biên chứa toán tử Baouedi – Goulaouic trong R^3. Điều kiện không tồn tại nghiệm có ý nghĩa quan trọng, mở ra hướng nghiên cứu tồn tại nghiệm yếu của bài toán.

Từ khóa: *Bài toán biên, toán tử elliptic, toán tử Baouedi – Goulaouic, nghiệm yếu.*

Xét bài toán sau

Giả sử Ω là miền giới nội trong R^3, với biên trơn và $\{0\} \in \Omega$

Ta xét bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(u) = 0 \quad trong\ \Omega & (1) \\ \qquad\qquad u = 0 \quad trong\ \partial\Omega & (2) \end{cases}$$

Trong đó $f(u) \in C(R)$, $f(0) = 0$, $g(x) = |x|^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$

Đặt $F(u) = \int\limits_0^u f(t)dt$, $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Ta sẽ đưa ra điều kiện không tồn tại nghiệm $u \neq 0$, $u \in H^2(\Omega)$ (không gian Sobolev) của Bài toán (1), (2).

Định nghĩa. *Miền Ω gọi là L_k - hình sao đối với {0} nếu $x\upsilon_1 + y\upsilon_2 + (k+1)z\upsilon_3 > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$*

Định lý. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với {0} và thỏa mãn $(k+3)F(u) - \dfrac{k+1}{2}f(u)u < 0$ khi $u \neq 0$. Khi đó không tồn tại nghiệm $u \neq 0$, $u \in H^2(\Omega)$ cho Bài toán (1), (2).*

Để chứng minh Định lý ta cần sử dụng kết quả của Bổ đề sau

Bổ đề. *Giả sử u (x, y, z) là nghiệm của Bài toán (1), (2) thuộc không gian $H^2(\Omega)$. Khi đó u(x, y, z) thỏa mãn đẳng thức*

$$\int\limits_\Omega \left((k+3)F(u) - \frac{k+1}{2}f(u)u\right)dxdydz = \int\limits_\Omega (xg'(x)g(x) - kg^2(x))\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dxdydz$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} (\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + g^2(x)\upsilon_3^2)(x\upsilon_1 + y\upsilon_2 + (k+1)z\upsilon_3)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds. \qquad (3)$$

Chứng minh. Do Ω là miền trơn bị chặn nên theo định lý nhúng Sobolev ta có:

* *Tel: 01656 065503*

$H^2(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega),\ 0<\alpha<1$ mà

$$\frac{\partial}{\partial x}(x,F(u)) = F(u) + x\,f(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}(y,F(u)) = F(u) + y\,f(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}(z,F(u)) = F(u) + z\,f(u)$$

Áp dụng công thức Gauss – Green ta được

$$\int_\Omega F(u)dxdydz = -\int_\Omega xf(u)\frac{\partial u}{\partial x}dxdydz = -\int_\Omega yf(u)\frac{\partial u}{\partial y}dxdydz,$$

$$(k+1)\int_\Omega F(u)dxdydz = -(k+1)\int_\Omega zf(u)\frac{\partial u}{\partial z}dxdydz.$$

Mà *u(x,y,z)* là nghiệm của Bài toán (1), (2) nên ta có

$$(k+3)\int_\Omega F(u)dxdydz = -\int_\Omega\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(k+1)z\frac{\partial u}{\partial z}\right)f(u)dxdydz$$

$$=\int_\Omega\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(k+1)z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdydz=\sum_{i=1}^{9}I_i$$

Ta có

$$I_1=\int_\Omega x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdydz=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdydz+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\nu_1 ds.$$

$$I_2=\int_\Omega x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdydz=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dxdydz-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\nu_1 ds+\int_{\partial\Omega}x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\nu_2 ds$$

$$I_3=\int_\Omega xg^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega g^2x\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2dxdydz+\int_\Omega xg(x)g'(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2dxdydz-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}xg^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\nu_1 ds+\int_{\partial\Omega}xg^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\nu_3$$

$$I_4=\int_\Omega y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}dxdydz=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdydz-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\nu_2 ds+\int_{\partial\Omega}y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\nu_1 ds.$$

$$I_5=\int_\Omega y\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdydz=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dxdydz+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\nu_2 ds.$$

$$I_6=\int_\Omega yg^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz=\frac{1}{2}\int_\Omega g^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2dxdydz-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}g^2(x)y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\nu_2 ds+\int_{\partial\Omega}g^2(x)y\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\nu_3$$

$$I_7=(k+1)\int_\Omega z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial z}dxdydz=\frac{k+1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdydz-\frac{k+1}{2}\int_{\partial\Omega}z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\nu_3 ds+(k+1)\int_{\partial\Omega}z\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\nu_1 ds.$$

$$I_8=(k+1)\int_\Omega z\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial z}dxdydz=\frac{k+1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dxdydz-\frac{k+1}{2}\int_{\partial\Omega}z\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\nu_3 ds+(k+1)\int_{\partial\Omega}z\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\nu_2 ds.$$

$$I_9=(k+1)\int_\Omega zg^2(x)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz=-\frac{k+1}{2}\int_\Omega g^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2dxdydz+\frac{k+1}{2}\int_{\partial\Omega}zf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\nu_3 ds.$$

Vậy $(k+3)\int_{\Omega} F(u)dxdydz = \sum_{i=1}^{9} I_i$, mà $\frac{\partial}{\partial x} = v_1\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial y} = v_2\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial z} = v_3\frac{\partial}{\partial v}$.

Thay vào ta được (3). Điều phải chứng minh.

Ta chứng minh Định lý:

Giả sử $u(x,y,z) \in H^2(\Omega)$ là nghiệm của Bài toán (1), (2). Suy ra $u(x,y,z)$ thỏa mãn (3)

Mặt khác, theo giả thiết Định lý có $(k+3)F(u) - \frac{k+1}{2}f(u)u < 0$ với $u \neq 0$.

Suy ra $\int_{\Omega}\left((3+k)F(u) + \frac{k+1}{2}f(u)u\right)dxdydz \neq \int_{\Omega}\left(xg'(x)g(x)(-k)g^2(x)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dxdydz$.

Suy ra, không tồn tại $u \neq 0$ là nghiệm của Bài toán (1), (2).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ambrosetri, A. & Rabinowitz, P. (1973), "Dual variational methods in critical theory and applications", *Journal of Function Analysis*, *14*, pp. 349- 381.
2. Chuong N. M., Ke T. D. & Tri N. M. (1999), "*Non existence theorems for boundary value problems for some classes of semilinear degenrate elliptic operators*" preprint.
3. Tri, N.M. (1998), "Critical Sobolev exponent for hypoelliptic operators", *Acta Mathematic Vietnamica*, *23*(1), pp. 83-94.
4. Tri N. M. (2013), "Semilinear Degenerate Elliptic Differentical Equations", *Local and global theories*, Lambert Academic Publishing, p. 271.

SUMMARY

THE THEOREM FOR THE NONEXISTENCE OF NONZERO SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH BAOUEDI -GOULAOUIC OPERATOR

Mong Thi Nguyet*, Nong Thi Them

Thai Nguyen High School – University of Education - TNU

Boundary value problems have been attracting many scientists's interest because of their wide applications in chemistry and physics. The studies on the boundary value problems involving degenerate elliptic operator, especially determination of the conditions for the existence and non existence of their solutions, are difficult and complicated. However, their obtained results have an important significance to the development of mathematic theory. In this paper, we generated the conditions for the non existence of the solutions of the boundary value problem containing Baouedi –Goulaouic operator in R^3. The conditions for non existence of the solutions play an important role in suggesting the way of investigation for the existence conditions of weak solutions in this problem.

Keywords: *Boundary value problem, elliptic operators, Baouedi-Goulaouic operator, weak solutions*

Ngày nhận bài: 01/3/2017; Ngày phản biện: 10/3/2017; Ngày duyệt đăng: 31/5/2017

* *Tel: 01656 065503*