Sự tồn tại kế hoạch chuyển động bậc cao

Trần Huệ Minh và Nguyễn Văn Ninh

Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Tóm tắt nội dung

Bài toán lập kế hoạch chuyển động của một hệ cơ học là một trong những nghiên cứu quan trọng trong lý thuyết rôbôt. Đặc biệt việc chỉ ra sự tồn tại của một kế hoạch chuyển động dẫn tới khái niệm độ phức tạp tôpô bậc cao. Trong bài báo này, chúng tôi chỉ ra điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại một kế hoạch chuyển động bậc cao. Từ đó đưa ra một số ví dụ minh họa.

Từ khóa: *Kế hoạch chuyển động, không gian co rút được, độ phức tạp tôpô, nhát cắt, đồng luân.*

1 Sự tồn tại nhát cắt

Giả sử X ký hiệu không gian các trạng thái của một hệ cơ học. Các trạng thái được biểu diễn bởi các điểm của X. Một chuyển động liên tục của hệ được biểu diễn bởi một đường cong liên tục $\gamma : [0;1] \to X$. Điểm $x = \gamma(0)$ là trạng thái ban đầu và điểm $y = \gamma(1)$ là trạng thái cuối cùng của hệ thống. Không gian X là liên thông đường khi và chỉ khi từ một trạng thái ban đầu bất kỳ ta có thể di chuyển đến một trạng thái bất kỳ khác bằng một chuyển động liên tục.

Người ta quan tâm tới việc đưa ra thuật toán để tìm các chuyển động như vậy. Cụ thể chỉ ra một thuật toán cho tương ứng mỗi cặp điểm (x, y) của X, coi như cặp trạng thái " ban đầu - kết thúc ", với một chuyển động liên tục γ có trạng thái ban đầu là x và trạng thái kết thúc là y.

Bài toán vật lý trên được phát biểu lại theo ngôn ngữ toán học như sau.

Cho X là một không gian tôpô. Đặt $PX = \{\gamma : [0;1] \to X \text{ liên tục}\}$ là không gian các đường đi liên tục trong X với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \pi : PX &\to X \times X \\ \gamma &\mapsto (\gamma(0), \gamma(1)). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1. Một thuật toán kế hoạch chuyển động là một nhát cắt của phân thớ này, nghĩa là tìm ánh xạ liên tục $s : X \times X \to PX$ thoả mãn : $\pi s = id_{X \times X}$.

Như vậy chỉ ra một thuật toán lập kế hoạch chuyển động có nghĩa là chỉ ra sự tồn tại của một nhát cắt như vậy.

Câu hỏi đầu tiên đặt ra là : " Có tồn tại một nhát cắt s như trên hay không?". Câu trả lời được M. Farber đưa ra trong [1] như sau: " Cho X là không gian tôpô. Nhát cắt $s : X \times X \to PX$ tồn tại khi và chỉ khi X là co rút được."

Năm 2010, YB .Rudyak tổng quát hóa bài toán trên như sau (xem [2]).

Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, đặt $J_n = [0;1] \vee [0;1] \vee ... \vee [0;1]$ là kết của n đoạn thẳng đơn vị tại điểm 0. Ký hiệu X^{J_n} là tập các ánh xạ liên tục $\gamma : J_n \to X^n$. Khi đó X^{J_n} là không gian tôpô với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} e_n : X^{J_n} &\to X^n \\ \gamma &\mapsto (\gamma(1_1), \gamma(1_2), ..., \gamma(1_n)). \end{aligned}$$

1_i là điểm 1 của đoạn $[0;1]$ thứ i trong J_n. Khi đó, e_n là phân thớ theo nghĩa Sere và thớ F đồng luân với $(\Omega X)^{n-1}$.

Bài toán này tương ứng với bài toán vật lý sau: Xét X là không gian các trạng thái của một hệ cơ học thì cho một điểm $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ có nghĩa là cho một bộ gồm n trạng thái của hệ. Bài toán lập kế hoạch chuyển động bây giờ yêu cầu chuyển động đồng thời hệ thống từ điểm x_1 đến $(n-1)$ điểm $x_2, ..., x_n$ còn lại một cách liên tục. Hay có thể hiểu cách khác là ta phải có kế hoạch để $(n-1)$ robot cùng xuất phát từ điểm x_1 và di chuyển đồng thời tới $(n-1)$ điểm $x_2, ..., x_n$. Thực chất bài toán này cũng tương đương với bài toán lập kế hoạch chuyển động của hệ cơ học từ trạng thái x đến trạng thái y và trải qua $n-2$ trạng thái khác.

Định nghĩa 2. Một thuật toán kế hoạch chuyển động bậc cao là một nhát cắt của phân thớ e_n, nghĩa là tìm ánh xạ liên tục $s : X^n \to X^{J_n}$ thoả mãn : $\pi s = id_{X^n}$.

Câu hỏi cũng được đặt ra là : " Với mỗi $n \geq 2$, có tồn tại một kế hoạch chuyển động như vậy không?"

Câu trả lời được chúng tôi chứng minh trong định lý sau

Định lý 1. *Với mỗi $n \geq 2$ bất kỳ, X là không gian tôpô. Khi đó, nhát cắt $s : X^n \to X^{J_n}$ tồn tại khi và chỉ khi X là co rút được.*

Vậy kế hoạch chuyển động cũng chỉ tồn tại trong trường hợp rất đơn giản. Trước khi chứng minh định lý này ta nhắc lại định nghĩa sau

Định nghĩa 3. Cho X là không gian tôpô. X được gọi là co rút được nếu ánh xạ đồng nhất id_X đồng luân với ánh xạ hằng. Nghĩa là tồn tại họ ánh xạ liên tục $h_t : X \to X$, $t \in [0;1]$ sao cho với mọi $x \in X$, $h_0(x) = x$ và $h_1(x) = x_0$ (cố định) .

Chứng minh. (của định lý 1)
Điều kiện cần: Giả sử tồn tại nhát cắt s của phân thớ (X^{J_n}, e_n, X^n, F). Kí hiệu $s_i(x, y)$ là hạn chế của $s(x, y, ..., y)$ lên đoạn $[0; 1]$ thứ i của J_n, $i = 1, ..., n$. Cố định một điểm $x_0 \in X$. Xét họ ánh xạ:

$h_t : X \to X$, với mỗi $x \in X$, $t \in [0, 1]$

$$h_t(x) = \begin{cases} s_1(x, x_0)(1 - 2t) \text{ nếu } t \in [0; \frac{1}{2}]; \\ s_n(x, x_0)(2t - 1) \text{ nếu } t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Ta có $h_0(x) = x$, $h_1(x) = x_0$. Vậy X co rút được về x_0 bởi họ h_t.

Điều kiện đủ: Giả sử rằng có đồng luân liên tục $h_t : X \to X$ thoả mãn $h_0(x) = x$, $h_1(x) = x_0$ với mọi $x \in X$. Với hai điểm bất kỳ $x, y \in X$.

Kí hiệu $\gamma_{x,y}$ là đường nối x và y được xác định như sau :

$$\gamma_{x,y}(t) = \begin{cases} h_{2t}(x), & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h_{2(1-t)}(y), & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Với mỗi bộ $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$. Xét tương ứng như sau

$s : X^n \to X^{J_n}$ xác định bởi $s(x_1, x_2, ..., x_n)_{|[0;1]_i} = \gamma_{x_1,x_i}$. Khi đó s là ánh xạ cần tìm. □

2 Ví dụ

Trong thực tế, tất cả các không gian các trạng thái đều có thể coi là tập con của $\mathbb{R}^k$ (với số tự nhiên k nào đó). Xét $\mathbb{R}^n$ với tôpô tự nhiên. Trong phần này ta sẽ xét một số ví dụ khi X là tập con của $\mathbb{R}^k$, trong các ví dụ này ta sẽ xây dựng trực tiếp kế hoạch chuyển động s. Chú ý rằng, việc xây dựng s chính là việc xây dựng các đường nối hai điểm bất kì trong X.

2.1 Tập hình sao

Với $x, y \in \mathbb{R}^k$, ta định nghĩa đoạn thẳng $[x; y]$ là tập hợp các điểm

$$\{a \in \mathbb{R}^n | a = (1 - \lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0; 1]\}$$

Định nghĩa 4. Cho X là tập con không rỗng của $\mathbb{R}^n$.
i) X được gọi là tập lồi nếu với mọi $x, y \in X$ thì $[x; y]$ nằm hoàn toàn trên X.
ii)X được gọi là tập hình sao đối với x_0 nếu với mọi $x \in X$ thì $[x_0; x]$ nằm hoàn toàn trên X. X được gọi là tập hình sao nếu X là tập hình sao đối với một điểm nào đó.

Từ định nghĩa ta có: Nếu X là tập lồi thì X là tập hình sao với mọi điểm $x \in X$. Tập lồi và tập hình sao là các tập quan trong trong việc nghiên cứu các bất biến của một không gian tôpô. Ngoài ra nếu X là điểm hình sao đối với điểm x_0 thì họ ánh xạ $h_t : X \to X$ xác định bởi

$$h_t(x) = (1 - t)x_0 + tx, \ \ \forall x \in X$$

thỏa mãn Định nghĩa 3. Nghĩa là: Nếu X là tập hình sao thì X co rút được. Từ đó suy ra nếu X là tập lồi thì X cũng co rút được.

Bây giờ ta sẽ xây dựng kế hoạch trên X trong trường hợp X là tập hình sao đối với điểm x_0. Ánh xạ $s : X^n \to X^{J_n}$ được xác định như trong chứng minh của Định lý 1, trong đó đường đi từ x đến y được xác định như sau

$$\gamma_{x,y}(t) = \begin{cases} 2tx_0 + (1 - 2t)x, & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ 2tx_0 + (2t - 1)y, & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Chú ý rằng sự tồn tại kế hoạch s là không duy nhất. Điều này thể hiện rõ trong trường hợp X là tập lồi, vì trong trường hợp này ta có thể xét đường nối x và y là $\gamma_{x,y}$ có thể được xác định như sau

$$\gamma_{x,y}(t) = (1 - t)x + ty, \ \ \forall t \in [0; 1].$$

2.2 Tập trên và dưới đồ thị

Với $k \geq 1$. Xét hàm số liên tục $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Ta kí hiệu các tập con của $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ như sau

$$U_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} | y > f(x)\};$$

$$\overline{U}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} | y \geq f(x)\};$$

$$L_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} | y > f(x)\};$$

$$\overline{L}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1} | y \geq f(x)\}.$$

Ta sẽ xây dựng trực tiếp các nhát cắt trên các tập này, từ đó suy ra các tập như trên là các tập lồi.

Với mỗi $(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1}$, xét các đường đi trong $\mathbb{R}^{k+1}$ xác định bởi

$$\tau_{x,y}(t) = (x, (1-t)y + tf(x))$$

$$\tau^+_{x,y}(t) = (x, (1-t)y + t(f(x)+\varepsilon))$$

$$\tau^-_{x,y}(t) = (x, (1-t)y + t(f(x)-\varepsilon))$$

Dễ thấy với mọi $t \in [0;1]$ ta có

- Nếu $(x,y) \in \overline{U}_f$ thì $\tau_{x,y}(t) \in \overline{U}_f$.
- Nếu $(x,y) \in \overline{L}_f$ thì $\tau_{x,y}(t) \in \overline{L}_f$.
- Nếu $(x,y) \in U_f$ thì $\tau^-_{x,y}(t) \in U_f$.
- Nếu $(x,y) \in L_f$ thì $\tau^+_{x,y}(t) \in L_f$.

Với $x, x' \in \mathbb{R}^k$, đặt

$\xi_{x,x'} : [0;1] \to \mathbb{R}^{k+1}$, xác định bởi

$$\xi_{x,x'}(t) = ((1-t)x + tx', f((1-t)x + tx')).$$

$\xi^+_{x,x'} : [0;1] \to U_f$, xác định bởi

$$\xi^+_{x,y}(t) = (x, (1-t)y + t(f(x)+\varepsilon)).$$

$\xi^-_{x,x'} : [0;1] \to L_f$, xác định bởi

$$\xi+_{x,x'}(t) = ((1-t)x+tx', f((1-t)x+tx')-\varepsilon).$$

Với hai điểm $(x,y),(x',y')$thuộc $\overline{U}_f$ hoặc $\overline{L}$ ta xét đường đi từ (x,y) tới (x',y') là $\gamma_{(x,y),(x',y')}$ như sau

$$\gamma_{(x,y),(x',y')}(t) = \begin{cases} \tau_{x,y}(3t) \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ \xi_{x,x'}(3t-1) \text{nếu } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ \tau_{x',y'}(3t-2) \text{nếu } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Với hai điểm $(x,y),(x',y')$thuộc U_f ta xét đường đi từ (x,y) tới (x',y') là $\gamma^+_{(x,y),(x',y')}$ như sau

$$\gamma^+_{(x,y),(x',y')}(t) = \begin{cases} \tau^+_{x,y}(3t) \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ \xi^+_{x,x'}(3t-1) \text{nếu } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ \tau^+_{x',y'}(3t-2) \text{nếu } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Với hai điểm $(x,y),(x',y')$thuộc L_f ta xét đường đi từ (x,y) tới (x',y') là $\gamma^-_{(x,y),(x',y')}$ như sau

$$\gamma^-_{(x,y),(x',y')}(t) = \begin{cases} \tau^-_{x,y}(3t) \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ \xi^-_{x,x'}(3t-1) \text{nếu } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ \tau^-_{x',y'}(3t-2) \text{nếu } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Từ tính liên tục của f ta suy ra $\gamma_{(x,y),(x',y')}$, $\gamma^+_{(x,y),(x',y')}$, $\gamma^-_{(x,y),(x',y')}$ liên tục. Từ đó, ánh xạ $s : X^n \to X^{J_n}$ được xác định như trong chứng minh của Định lý 1 liên tục và là nhát cắt của e_n, trong đó $X = \overline{U}_f$, ol_f, L_f hoặc U_f.

Tài liệu

[1] M.Farber, (2003) , "Topological complexity of motion planning", *Discrete Comput. Geom* 29, 211 - 221.

[2] Yuli B. Rudyak, (2010), "On higher analogs of topological complexity", *Topology and its Applications*, 157, 916-920.

THE EXISTENCE OF HIGHER MOTION PLANNING

Trần Huệ Minh *
Thai Nguyen University of Education
Phone number: 0912737474

Nguyễn Văn Ninh †
Thai Nguyen University of Education
Phone number: 0978692822

Summary: *The problem of planning the motion of a mechanical system is one of the most important studies in robotic theory. In particular, pointing out the existence of a motion planning leads to the notion of higher topological complexity. In this article, we point to the necessary and sufficient conditions for the existence of higher motion planning and give some illustrative examples.*

Keyword: Motion planning, contractible space, topological complexity, section, homotopy.

mail: tranhueminh@gmail.com
mail: nguyenninhsp@gmail.com

Ngày nhận bài: 01/9/2017; Ngày phản biện: 21/9/2017; Ngày duyệt đăng: 16/10/2017