ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 225(06): 405 - 410

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NEWTON – KRYLOV BẬC BA

Lại Văn Trung[1*], Hoàng Phương Khánh[1], Quách Mai Liên[1], Nguyễn Viết Hoằng[2]
[1]Trường ĐH Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên,
[2]Trường Cao đẳng Sư phạm Thái Nguyên

TÓM TẮT

Khi giải quyết các bài toán trong thực tế, các ràng buộc thường được xây dựng dưới dạng một hệ phương trình phi tuyến. Việc giải nghiệm chính xác của các hệ phương trình này là khó khăn, thậm chí có nhiều hệ phương trình mà chúng ta không tìm được nghiệm chính xác của nó. Do đó vấn đề giải gần đúng nghiệm của các bài toán này là rất cần thiết. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày việc giải hệ phương trình phi tuyến bằng phương pháp Newton – Krylov bậc ba, đồng thời đưa ra chứng minh sự hội tụ của công thức lặp. Bài báo còn trình bày một số kết quả thực nghiệm cho bài toán.
Từ khóa: *Phương pháp Newton-Krylov bậc ba; hệ phương trình phi tuyến; tốc độ hội tụ; sự hội tụ; công thức lặp.*

Ngày nhận bài: 21/02/2020; Ngày hoàn thiện: 04/3/2020; Ngày đăng: 29/5/2020

SOLVING SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS BY THE THIRD – ODER NEWTON – KRYLOV METHOD

Lai Van Trung[1*], Hoang Phuong Khanh[1], Quach Mai Lien[1], Nguyen Viet Hoang[2]
[1]TNU - University of Information and Communication Technology
[2]Thai Nguyen Pedagogy College

ABSTRACT

When solving problems in practice, constraints are often formulated as a system of nonlinear equations. The exact solution of these systems of equations is difficult, and there are even systems of equations for which we cannot find an exact solution. Therefore, the problem of approximate solution of this problem is very necessary. In this paper, we present solving the system of nonlinear equations by third-order Newton - Krylov method, and prove the convergence of iterative formula. This paper also presents some empirical results for the problem.
Keywords: *Third-order Newton-Krylov method; nonlinear equations system; convergence speed; convergence; iterative formula.*

Received: 21/02/2020; Revised: 04/3/2020; Published: 29/5/2020

* Corresponding author. *Email: lvtrungsp@gmail.com*

1. Giới thiệu

Xét hệ phương trình phi tuyến:

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

trong đó, $F = (f_1(x), f_2(x); \dots; f_n(x))^t$ với $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm phi tuyến ($i = 1, 2, \dots, n$).

Đã có nhiều phương pháp lặp được đưa ra để giải quyết bài toán (1). Chẳng hạn, phương pháp Newton [1] tìm nghiệm gần đúng x^* của bài toán (1) bằng công thức lặp:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Phương pháp của Chebyshev [2] với công thức lặp:

$$x_{n+1} = x_n - \left[I + \frac{1}{2} L_F(x_n)\right] F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

Phương pháp của Halley [2] với công thức lặp:

$$x_{n+1} = x_n - \left[I + \frac{1}{2} L_F(x_n)\left[I - \frac{1}{2} L_{F}(x_n)\right]^{-1}\right] F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó, I là ma trận đơn vị cấp n và $L_F(x) = F'(x)^{-1} F''(x) F'(x)^{-1} F(x), x \in \mathbb{R}^n$.

Tuy nhiên, trong trường hợp số phương trình trong hệ lớn thì việc giải quyết bằng các phương pháp trên là không hiệu quả hoặc tốn quá nhiều thời gian hoặc tính toán quá phức tạp. Để khắc phục hạn chế này, bằng cách tiếp cận khác, Krylov đưa ra một phương pháp để giải gần đúng hệ phương trình phi tuyến (1) mà chúng tôi sẽ trình bày trong bài báo này.

Cấu trúc của bài báo gồm 4 phần: Sau phần giới thiệu là phần 2, trình bày về phương pháp Newton - Krylov; phần 3 trình bày một số kết quả thực nghiệm; cuối cùng là phần kết luận.

2. Phương pháp Newton-Krylov

2.1. Phương pháp Newton-Krylov thường

Xét hệ phương trình:

$$F'(x_n) s_n = -F(x_n),\ s_n = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

Phương pháp Newton-Krylov là phương pháp tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình (2) với điều kiện

$$\left\| F'(x_n) s_n + F(x_n) \right\| \le \eta_n \left\| F(x_n) \right\|,$$

với $\eta_n \in [0, 1)$ gọi là điều kiện ràng buộc.

Thuật toán Newton-Krylov:

1. Lấy x_0 và $\eta_{max} \in [0, 1)$.

2. Cho $n = 0, 1, \dots,$ và làm theo các bước sau:

• Chọn $\eta_n \in [0; \eta_{max}]$,

• Áp dụng một phương pháp lặp để tìm nghiệm s_n của hệ $F'(x_n) s_n = -F(x_n)$.

Quá trình trên sẽ dừng lại khi điều kiện sau được thỏa mãn

$$\left\| F'(x_n) s_n + F(x_n) \right\| \le \eta_n \left\| F(x_n) \right\|.$$

• Hiệu chỉnh $x_{n+1} = x_n + s_n$.

2.2. Phương pháp Newton-Krylov bậc ba

Frontini và Sormani [3] đề nghị một phương pháp Newton cải tiến có tốc độ hội tụ cấp ba như sau:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'\left(x_n - \frac{1}{2} F'(x_n)^{-1} F(x_n)\right)} \tag{3}$$

Để thu được thuật toán Newton-Krylov ta viết lại công thức (3) như sau:

$$F'\left(x_n - \frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}F(x_n)\right)(x_{n+1} - x_n) = -F(x_n) \quad (4)$$

Đặt $k(x_n) = -\frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}F(x_n)$.

Khi đó ta có thể viết

$$F'(x_n)k(x_n) = -\frac{1}{2}F(x_n) \quad (5)$$

Vậy ta có thể áp dụng phương pháp Krylov để tìm nghiệm gần đúng $k(x_n)$ của phương trình (5).

Ta viết công thức (4) viết lại như sau:

$$F'(x_n + k(x_n))s_n = -F(x_n), \quad (6)$$

với $x_{n+1} = s_n + x_n$. (7)

Ta lại áp dụng thuật toán Newton-Krylov để tìm nghiệm x_{n+1} của hệ (6), (7).

Sự hội tụ và tốc độ hội tụ của phương pháp Newton-Krylov bậc ba được trình bày thông qua các Định nghĩa 2.1, Định lý 2.2 và Định lý 2.3 dưới đây.

Định nghĩa 2.1 (Tốc độ hội tụ) *Xét dãy* $e_n = x_n - a_n$, *nếu tồn tại một hàm* k *- tuyến tính* $K \subset L\left(\overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{k}, \mathbb{R}^n\right)$ *sao cho*

$$e_{n+1} = Ke_n^k + O\left(\|e_n\|^{k+1}\right), \quad với \quad e_n^k = \left(\overbrace{e,\ldots,e}^{k}\right)$$

và $\|e_n\|$ *là chuẩn Euclid thì* x_n *được gọi là hội tụ đến* a *với tốc độ hội tụ cấp* k.

Định lý 2.2 (Sự hội tụ của phương pháp Newton-Krylov bậc ba) *Cho ánh xạ* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *khả vi liên tục trên một tập lồi mở* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Giả sử tồn tại* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *và* $\alpha, \beta > 0$ *thỏa mãn* $S(x^*, r) \subset D$, $F'(x^*)^{-1}$ *tồn tại,* $\left\|F'(x^*)^{-1}\right\| \le \beta$ *và* $F' \in Lip_\gamma(S(x^*, r))$. *Khi đó tồn tại số* $\varepsilon > 0$ *thỏa mãn với mỗi* $x^0 \in \overline{S}(x^*, \varepsilon)$ *dãy* $x_1, x_2, \ldots$ *xác định bởi công thức (3) hội tụ đến* x^*.

Định lý 2.3 (Tốc độ hội tụ của phương pháp Newton-Krylov bậc ba) *Cho ánh xạ* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.2 và có đạo hàm đến cấp ba trên* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Khi đó dãy* $\{x_n\}$ *xác định bởi công thức (3) hội tụ đến* x^* *với tốc độ hội tụ cấp ba.*

Để chứng minh Định lý 2.2, trước hết chúng tôi trình bày các bổ đề sau.

Bổ đề 2.4 (Xem [4]) *Cho* $E, I \in \mathbb{R}^n$, *trong đó* I *là ma trận đơn vị. Nếu* $\|E\| < 1$ *thì* $(I - E)^{-1}$ *tồn tại và* $\left\|(I - E)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|E\|}$.

Hơn nữa, nếu A *khả nghịch và* $\left\|A^{-1}(B - A)\right\| < 1$ *thì* B *khả nghịch và*

$$\left\|B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \left\|A^{-1}(B - A)\right\|}.$$

Bổ đề 2.5 (Xem[4]) *Cho ánh xạ* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *khả vi liên tục trên một tập lồi, mở* D *và* $F' \in Lip_\gamma(D)$, *khi đó với mọi* $x + p \in D$ *ta có*

$$\left\|F(x + p) - F(x) - F'(x)p\right\| \le \frac{\gamma}{2}\|p\|^2.$$

Sau đây chúng tôi đưa ra việc chứng minh Định lý 2.2. Trước hết ta viết lại công thức (3) như sau: $x_{n+1} = x_n - F'(y_n)^{-1}F(x_n)$,

với $y_n = x_n - \frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}F(x_n)$.

Ta sẽ chứng minh cho $y_k, x_{k+1} \in S(x^*, \varepsilon)$, $k = 1, 2, 3\ldots$

Đặt $\varepsilon = min\left\{r, \frac{1}{4\beta\gamma}\right\}$. Từ $\|x^0 - x^*\| < \varepsilon$ và F' Lipschitz tại x^* ta có:

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'(x^0) - F'(x^*)\right]\right\| \le \left\|F'(x^*)^{-1}\right\|\left\|F'(x^0) - F'(x^*)\right\| \le \beta\gamma\left\|x^0 - x^*\right\| < \beta\gamma\varepsilon \le \frac{1}{4}.$$

Áp dụng Bổ đề 2.4 ta có $F'(y^0)$ khả nghịch và

$$\left\|F'(x^0)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|F'(x^*)^{-1}\right\|}{1 - \left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'(x^0) - F'(x^*)\right]\right\|} \le \frac{4}{3}\left\|F'(x^*)^{-1}\right\| \le \frac{4}{3}\beta < 2\beta.$$

Áp dụng Bổ đề 2.5 ta có $\|y^0 - x^*\| = \left\|x^0 - x^* - \frac{1}{2}F'(x^0)^{-1}F(x^0)\right\|$

$$-\frac{1}{2}\left\|F'(x^0)^{-1}\left[F(x^*) - F(x^0) - F'(x^0)(x^* - x^0)\right] - (x_0 - x^*)\right\|$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{\left\|F'(x^0)^{-1}\right\|\left\|F(x^*) - F(x^0) - F'(x^0)(x^* - x^0)\right\| + \left\|x^0 - x^*\right\|\right\}$$

$$\le \frac{1}{2}\left[2\beta\frac{\gamma}{2}\left\|x^* - x^0\right\|^2 - \left\|x^0 - x^*\right\|\right] < \frac{5}{8}\left\|x^0 - x^*\right\| < \frac{2}{3}\left\|x^0 - x^*\right\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Do đó $y^0 \in S(x^*, \varepsilon)$.

Từ $\|y^0 - x^*\| < \frac{2}{3}\varepsilon$ và F' là Lipschitz tại x^* nên ta có

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'(y^0) - F'(x^*)\right]\right\| \le \left\|F'(x^*)^{-1}\right\|\left\|F'(y^0) - F'(x^*)\right\| \le \beta\gamma\left\|y^0 - x^*\right\| < \beta\gamma\frac{2}{3}\varepsilon < \frac{1}{6}.$$

Áp dụng Bổ đề 2.4 ta có $F'(y^0)$ khả nghịch và

$$\left\|F'(y^0)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|F'(x^*)^{-1}\right\|}{1 - \left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'(y^0) - F'(x^*)\right]\right\|} \le \frac{6}{5}\left\|F'(x^*)^{-1}\right\| < 2\beta.$$

Ta có $x_1 - x^* = -F'(y^0)^{-1}\left(F(x^0) - F(x^*) - F'(x^*)(x^0 - x^*) + \left[F'(x^*) - F'(y^0)\right](x^0 - x^*)\right)$.

Áp dụng Bổ đề 2.5 ta có:

$$\left\|x_1 - x^*\right\| \le \left\|F'(y^0)^{-1}\right\|\left(\left\|F(x^0) - F(x^*) - F'(x^*)(x^0 - x^*)\right\| + \left\|\left[F'(x^*) - F'(y^0)\right](x^0 - x^*)\right\|\right)$$

$$\le 2\beta\left[\frac{\gamma}{2}\left\|x^0 - x^*\right\|^2 + \gamma\left\|y^0 - x^*\right\|\left\|x^0 - x^*\right\|\right] < \beta\gamma\varepsilon\left\|x^0 - x^*\right\| + \frac{4}{3}\beta\gamma\varepsilon\left\|x^0 - x^*\right\|$$

$$< \frac{1}{4}\left\|x^0 - x^*\right\| + \frac{1}{3}\left\|x^0 - x^*\right\| < \frac{2}{3}\left\|x^0 - x^*\right\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Suy ra $x_1 \in S(x^*,\varepsilon)$.

Bằng cách chứng minh tương tự ta có $y_1, x_2 \in S(x^*,\varepsilon)$ và bằng chứng minh quy nạp ta có $y_k, x_{k+1} \in S(x^*,\varepsilon)$, $k = 1,2,3\ldots$

Do đó $\left\|x_{k+1} - x^*\right\| < \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left\|x^0 - x^*\right\|$, suy ra x_n hội tụ về x^*.

3. Kết quả thực nghiệm

Trong phần này, chúng tôi đưa ra một số ví dụ và bằng cách sử dụng Matlab để tìm nghiệm gần đúng của hệ thông qua công thức lặp (3). Trong các ví dụ này, các bước lặp sẽ dừng lại khi $\left\|F(x_n)\right\| < 10^{-13}$ và chúng tôi cũng đưa ra thời gian chạy của thuật toán.

Ví dụ 1: Giải gần đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 - \frac{1}{9}x_1^2 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - \frac{1}{9}x_2^2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Ta chọn nghiệm gần đúng ban đầu là $x^0 = (11.4, 11.4)^T$, sau khi thực hiện 3 bước lặp với thời gian chạy 0.109 (s) ta được nghiệm gần đúng của hệ (8) là $x = (9, 9)^T$.

Mã code :

```
Clear all
Syms x1 x2
Format long ;
f = [2*x1-1/9*x1*x1-x2 ; - x1+2*x2-1/9*x2*x2];
y = [x1; x2]; xn = [11.4; 11.4];
R = Jacobian(f,y) ;
m = 0 ; tic ;
While (m<100)
a = subs(R, {x1, x2}, {xn(1), xn(2)} ;
A = a'*a ; B = a'*b ;
Tol = 1e^-13 ; z0 = zeros(2 ;1);
kn = fom(A, B, z0, tol) ;
% (Tính nghiệm gần đúng k(xn) của hệ
F'(xn)k(xn) = -1/2 F(xn) )
yn = xn + kn;
a = subs(R, {x1, x2}, {yn(1), yn(2)});
b = -subs(f, {x1, x2}, {xn(1), xn(2)});
A = a'*a ; B = a'*b ;
Tol = 1e^-13 ; z0 = zeros(2 ;1);
kn = fom(A, B, z0, tol) ;
% (Tính nghiệm gần đúng sn của hệ
F'(xn + k(xn))sn = -F(xn) )
xn = xn + sn;
If norm(B)< 1e^-13 breack;
else
m = m+1;
end;
end; toc;
fprintf('Thời gian thực hiện:'); disp(toc);
If (m=100)
fprintf('Không hội tụ sau 100 lần lặp');
else
fprintf('Số lần lặp là'); m
fprintf('Nghiệm là'); xn
end.
```

Ví dụ 2: Giải gần đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^{x_1} - x_3^2 - x_4^2 = 0 \\ e^{x_2} - x_4^2 - x_1^2 = 0 \\ e^{x_3} - x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ e^{x_4} - x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Bằng cách chọn nghiệm gần đúng ban đầu $x^0 = (1,1,1,1)$, sau khi thực hiện ba bước lặp với thời gian chạy 0.141 (s) ta được nghiệm gần đúng của hệ phương trình (9) là:

$$1.48796206549818, 1.48796206549818, 1.48796206549818, 1.48796206549818 \ .$$

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày phương pháp Newton – Krylov bậc ba để giải hệ phương trình phi tuyến. Đây là kết quả quan trọng sẽ được nhóm tác giả sử dụng để giải quyết các mô hình bài toán thực tế có các ràng buộc phi tuyến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1]. I. K. Argyros, *Convergence and Applications of Newton type iterations*. Springer Science + Business Media LLC, 233 Spring Street New York, NY 10013, U.S.A, 2008.

[2]. J. M. Gutierrez, and M. A. Hernandez, "A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces," *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 113-130, 1997.

[3]. M. Frontini, and E. Sormani, "Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations," *Appl. Math. Comput*, vol. 149, pp. 771-782, 2004.

[4]. J. E. Dennis, and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983.