NGHIÊN CỨU XÂY DỰNG VÀ ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH LUỒNG GIAO THÔNG TRÊN MỘT TUYẾN PHỐ, SỬ DỤNG MATHLAB TÍNH MẬT ĐỘ PHƯƠNG TIỆN TRONG TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ

Lại Văn Trung*, Hoàng Phương Khánh, Quách Mai Liên
Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Trong những năm gần đây, các bài toán về giao thông được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Việc tìm mật độ giao thông tại một thời điểm giúp ta dự báo được có xảy ra tắc nghẽn giao thông không. Vấn đề này sẽ được giải quyết thông qua việc giải bài toán phương trình luồng giao thông. Bài báo trình bày mô hình toán học cho hiện tượng xe lưu thông trên một tuyến phố thông qua phương trình luồng giao thông. Các tham số mô tả chuyển động của các phương tiện giao thông gồm tham số mô tả mật độ; tham số mô tả vận tốc; tham số mô tả lưu lượng xe. Bằng cách sử dụng phương pháp sai phân phương trình đạo hàm riêng, bài báo giải quyết một bài toán cụ thể cho phương trình luồng giao thông trên một tuyến phố.

Từ khóa: *Phương trình luồng giao thông, mật độ, lưu lượng, vận tốc, sai phân*

Ngày nhận bài: 04/3/2019; Ngày hoàn thiện: 02/4/2019;Ngày duyệt đăng: 07/5/2019

RESEARCHING TO BUID AND APPLY THE TRAFFIC FLOW EQUATION ON A STREET, CALCULATE VEHICLE DENSITY IN SPECIFIC CASES BY USING MATHLAB

Lai Van Trung*, Hoang Phuong Khanh, Quach Mai Lien
University of Information and Communication Technology - TNU

ABSTRACT

In recent years, traffic problems are interested in reseach by many domestic and foreign scientists. Finding traffic density at a time help us predict whether traffic congestion occurs. This problem will be solved through solving the problem of the flow equation. The paper presents a mathematical model for the phenomenon of vehicles traveling on a street through the traffic flow equation. The parameters describe the movement of vehicles including parameters describing the density, velocity, flux. By using the differential derivative equation method, the paper addresses a specific problem for the traffic flow equation on a street.

Keywords: *Equation of traffic flow, density, flux, velocity, difference*

Received: 04/3/2019; Revised: 02/4/2019;Approved: 07/5/2019

* Corresponding author: *Tel: 0978 752611; Email: lvtrung@ictu.edu.vn*

1. Giới thiệu

Trong toán học và kỹ thuật lưu lượng giao thông là nghiên cứu tương tác giữa xe cộ, tài xế và cơ sở hạ tầng (bao gồm đường cao tốc, biển báo và thiết bị kiểm soát giao thông), nhằm mục đích phát triển tối ưu mạng lưới đường bộ với lưu lượng giao thông hiệu quả và giảm thiểu tắc nghẽn giao thông [1].

Lý thuyết toán học của lưu lượng giao thông và phân tích cân bằng giao thông lần đầu tiên được giới thiệu bởi Frank Knite vào năm 1920, và được giải quyết bởi Wardrop với các nguyên lý cân bằng thứ hai.

Mark H. Holmes [3] đã giới thiệu mô hình toán học cho hiện tượng xe lưu thông trên đường phố dưới dạng phương trình đạo hàm riêng. Vấn đề tìm lời giải số cho một bài toán chưa được quan tâm. Bằng phương pháp số, mà cụ thể là phương pháp sai phân phương trình đạo hàm riêng, bài báo trình bày việc giải quyết một bài toán cụ thể trên một tuyến phố.

Cấu trúc của bài báo gồm 5 phần: Sau phần giới thiệu là Phần 2, trình bày về mô hình toán học của bài toán luồng giao thông; Phần 3 trình bày về lược đồ sai phân của phương trình luồng giao thông; Phần 4 trình bày kết quả thực nghiệm của bài toán; Cuối cùng là phần kết luận.

2. Mô hình toán học của bài toán luồng giao thông

Trong mô hình toán học, các đối tượng ở đây sẽ được xác định là ô tô và đường đi là đường cao tốc. Trong bài báo chúng tôi cũng giả định rằng các đối tượng đủ nhiều đến mức không cần thiết phải theo dõi từng đối tượng riêng lẻ và ta có thể sử dụng giá trị trung bình.

Sau đây bài báo trình bày một số tham số của bài toán.

Định nghĩa 2.1 (Hàm mật độ) *Hàm mật độ là hàm hai biến* x,t *(với* x *là vị trí còn* t *là thời gian), được ký hiệu là* $\rho(x,t)$ *và được xác định bởi* $\rho(x_0,t_0) \approx \frac{m_1}{2\Delta x}$*, trong đó* m_1 *là số lượng xe từ vị trí*

$x_0 - \Delta x$ *đến vị trí* $x_0 + \Delta x$ *tại thời điểm* $t = t_0$.

Giả sử Δx là đủ nhỏ để chỉ chứa các ô tô trong vùng lân cận của điểm x_0 nhưng đủ lớn để có thể chứa được các ô tô. Khi đó $\rho(x_0,t_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m_1}{2\Delta x}$.

Định nghĩa 2.2 (Hàm lưu lượng) *Hàm lưu lượng là hàm hai biến* x,t *(với* x *là vị trí còn* t *là thời gian), được ký hiệu là* $J(x,t)$ *và được xác định bởi* $J(x_0,t_0) \approx \frac{m_2}{2\Delta t}$*, trong đó* m_2 *là số lượng xe*

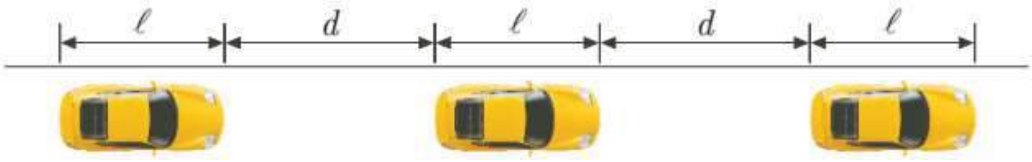
chạy qua vị trí x_0 *từ thời điểm* $t_0 - \Delta t$ *đến thời điểm* $t_0 + \Delta t$.

Giả sử Δt đủ nhỏ, khi đó $J(x_0,t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_2}{2\Delta t}$.

Định nghĩa 2.3 (Hàm vận tốc) Hàm vận tốc là hàm hai biến x,t (với x là vị trí còn t là thời gian) được ký hiệu là $v(x,t)$ và được xác định bởi $v(x_0,t_0) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$, trong đó v_i ($i = 1,2,...,n$) là vận tốc của xe thứ i trong khoảng thời gian $t_0 - \Delta t$ đến $t_0 + \Delta t$ và từ vị trí $x_0 - \Delta x$ đến $x_0 + \Delta x$.

Từ định nghĩa 2.2 và 2.3 ta có lưu lượng và vận tốc được liên hệ bởi đẳng thức $J = \rho.v$.

Để làm rõ hơn các tham số trên, ta xét mô hình giao thông **phân bố đồng đều** sau:



Hình 1. *Phân bố đồng đều*

Giả sử trên một đoạn đường cao tốc, các xe đều có độ dài là l và khoảng cách giữa các xe đều là d như Hình 1. Khi đó:

Số xe từ vị trí $x-\Delta x$ đến vị trí $x+\Delta x$ là $\frac{2\Delta x}{l+d}$, do đó mật độ được xác định

$$\rho(x,t)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2\Delta x}{l+d}}{2\Delta x}=\frac{1}{l+d}.$$

Số lượng xe qua vị trí x từ thời điểm $t-\Delta t$ đến thời điểm $t+\Delta t$ là $\frac{2v\Delta t}{l+d}$, do đó lưu lượng được xác định $J(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{2v\Delta t}{l+d}}{2\Delta t}=\frac{v}{l+d}$.

Một vấn đề được đặt ra ở đây là chúng ta phải thiết lập mối liên hệ của các tham số mật độ, lưu lượng và vận tốc. Luật cân bằng cho mật độ sau đây sẽ thiết lập mối liên hệ giữa các tham số này.

Luật cân bằng cho mật độ (xem [3]) Đặt N_1 là số lượng xe từ vị trí $x_0-\Delta x$ đến vị trí $x_0+\Delta x$ tại thời điểm $t_0+\Delta t$; N_2 là số lượng xe từ vị trí $x_0-\Delta x$ đến vị trí $x_0+\Delta x$ tại thời điểm $t_0-\Delta t$; M_1 là số lượng xe đi qua vị trí $x_0-\Delta x$ trong khoảng thời gian $t_0-\Delta t$ đến $t_0+\Delta t$; M_2 là số lượng xe đi qua vị trí $x_0+\Delta x$ trong khoảng thời gian $t_0-\Delta t$ đến $t_0+\Delta t$. Khi đó

$$N_1-N_2=M_1-M_2. \tag{1}$$

Từ định nghĩa về mật độ, lưu lượng và từ luật cân bằng trên ta có:

$$2\Delta x\left(\rho(x_0,t_0+\Delta t)-\rho(x_0,t_0-\Delta t)\right)=2\Delta t\left(J(x_0-\Delta x,t_0)-J(x_0+\Delta x,t_0)\right) \tag{2}$$

Sử dụng khai triển Taylor khi đó (2) trở thành:

$$2\Delta x\left[\left(\rho+2\Delta t\rho_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\rho_{tt}+\frac{1}{6}(\Delta t)^3\rho_{ttt}+..\right)-\left(\rho-\Delta t\rho_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\rho_{tt}-\frac{1}{6}(\Delta t)^3\rho_{ttt}+...\right)\right]$$

$$=2\Delta t\left[\left(J-\Delta xJ_x+\frac{1}{2}(\Delta x)^2J_{xx}-\frac{1}{6}(\Delta x)^3J_{xxx}+...\right)-\left(J+\Delta xJ_x+\frac{1}{2}(\Delta x)^2J_{xx}+\frac{1}{6}(\Delta x)^3J_{xxx}+...\right)\right].$$

Rút gọn hai vế đẳng thức trên ta được

$$\rho_t+O\left((\Delta t)^2\right)=-J_x+O\left((\Delta x)^2\right). \tag{3}$$

Cho $\Delta x \to 0$ và $\Delta t \to 0$ khi đó (3) trở thành $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$, điều này dẫn tới

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

Xét trên một đoạn đường có độ dài L, khi đó phương trình luồng giao thông trên đoạn đường này như sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \ 0 < x < L, t > 0, \\ \rho(x,0) \quad = f(x), \\ \rho(0,t) \quad = g(t), \end{cases} \tag{4}$$

trong đó hàm $f(x)$ là mật độ ban đầu ở vị trí x tại thời điểm $t = 0,$ còn hàm $g(t)$ là điều kiện biên của bài toán, là mật độ ở vị trí $x = 0$ tại thời điểm t.

3. Lược đồ sai phân của phương trình luồng giao thông

Trong bài báo này, ta xét vận tốc $v = a$ không đổi, khi đó bài toán (1) là

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a.\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \ 0 < x < L, t > 0, \\ \rho(x,0) \quad = f(x), \\ \rho(0,t) \quad = g(t). \end{cases} \tag{5}$$

Xét miền $Q = \{(x,t): 0 < x < L; 0 < t \le T\}$, chia miền Q thành ô bởi những đường thẳng $x = x_i, i = 0,1,2,...,n;\ t = t_j, j = 0,1,2,...,m.$

Đặt $h = \frac{L}{n}, \tau = \frac{T}{m}$ ta có $x_i = ih, i = 0,1,2,....,\text{n};\ t_j = j.\tau, j = 0,1,2,...,m.$

Mục tiêu của phương pháp là tìm nghiệm gần đúng của bài toán tại các nút (i, j).

Áp dụng công thức Taylor ta có

$$\frac{\rho(x_i,t_{j+1}) - \rho(x_i,t_{j-1})}{2\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x_i,t_j) + o(\tau)\ ; \quad \frac{\rho(x_{i+1},t_j) - \rho(x_{i-1},t_j)}{2h} = \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i,t_j) + o(\text{h})\ . \tag{6}$$

Thay (6) vào (5) ta được

$$\begin{cases} \frac{\rho(x_i,t_{j+1}) - \rho(x_i,t_{j-1})}{2\tau} + a.\frac{\rho(x_{i+1},t_j) - \rho(x_{i-1},t_j)}{2h} = 0, \text{i} = 1,2,..,\text{n}-1; \text{j} = 1,2,...,m-1, \\ \rho(x_i,0) = f(x_i), \text{i} = 0,1,2,..,\text{n}, \\ \rho(0,t_j) = g(t_j), \text{j} = 0,1,2,...,m. \end{cases}$$

Bằng cách chuyển vế ta được

$$\begin{cases} \rho(x_i,t_{j+1}) = -\frac{a.\tau}{h}\left[\rho(x_{i+1},\text{t}_j) - \rho(x_{i-1},t_j)\right] + \rho(x_i,t_{j-1}), \text{i} = 1,2,..,\text{n}-1; \text{j} = 1,2,...,m-1, \\ \rho(x_i,0) = f(x_i), \text{i} = 0,1,2,..,\text{n}, \\ \rho(0,t_j) = g(t_j), \text{j} = 0,1,2,...,m. \end{cases} \tag{7}$$

Lược đồ (7) được gọi là lược đồ sai phân của bài toán (5), nó cho phép ta tính được mật độ ở vị trí i tại thời điểm thứ $j+1$ thông qua các thời điểm trước đó.

4. Kết quả thực nghiệm

Xét trên một tuyến phố có độ dài khoảng 10 km, giả sử mỗi xe có độ dài 5.2 m, chuyển động với vận tốc 50 km/h.

Với giả thiết mật độ ban đầu tại thời điểm $t=0$ ở vị trí x trên đoạn đường là $f(x)=\begin{cases}20\left(1-\dfrac{x}{2}\right) & khi\ \ 0\le x<1,\\ 10\ \ khi\ \ 1\le x\le 10.\end{cases}$ và điều kiện biên của bài toán là mật độ ở vị trí $x=0$ tại thời điểm t là $g(t)=\begin{cases}20(1-t) & khi\ \ 0\le t<1,\\ 0 & khi\ \ t\ge 1.\end{cases}$. Bằng cách sử dụng Mathlab với lược đồ sai phân (7) ta được kết quả sau với lưới chia $\Delta x=0,5km;\ \Delta t=\dfrac{1}{6}$ giờ.

Bảng 1. *Kết quả thực nghiệm của bài toán (Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)*

$(x(km);t(h))$	$(0;0)$	$\left(0,5;\frac{1}{6}\right)$	$\left(1;\frac{1}{3}\right)$	$\left(2;\frac{1}{2}\right)$	$\left(2,5;\frac{1}{2}\right)$	$\left(2;\frac{2}{3}\right)$	$(3;1)$
$\rho(x,t)\left(\frac{xe}{km}\right)$	20	126	135	124	110	118	146
$(x(km);t(h))$	$(5;1)$	$\left(7;\frac{1}{2}\right)$	$(7,5;1)$	$\left(8;\frac{5}{6}\right)$	$\left(8;\frac{1}{2}\right)$	$\left(9;\frac{2}{3}\right)$	$(9,5;1)$
$\rho(x,t)\left(\frac{xe}{km}\right)$	143	122	145	163	117	100	96

5. Kết luận

Bài báo đã giới thiệu về mô hình toán học của phương trình luồng giao thông và lời giải số cho bài toán. Đây là kết quả quan trọng bước đầu để nhóm tác giả phát triển sang việc giải quyết bài toán trên một mô hình thành phố bao gồm nhiều tuyến phố liên thông với nhau.

6. Lời cảm ơn

Bài báo là sản phẩm khoa học của đề tài cấp cơ sở có mã số T2019-07-19, được tài trợ bởi kinh phí của Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Hữu Đức, *Nghiên cứu ứng dụng giao thông thông minh trong quản lý khai thác, điều hành giao thông và thu phí trên hệ thống đường ô tô cao tốc Việt Nam*, Viện Khoa học và Công nghệ GTVT, tr. 182-207, 2014.

[2]. Alberto Bressan and Khai T. Nguyen, “Conservation law models for traffic flow on a network of roads”, *Networks & Heterogeneos Media*, 10(2), pp. 255-293, 2015.

[3]. Mark H. Holmes (2009), *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*, Springer Science+Business Media, pp. 205-264, 2015.

[4]. S. R. Khadka,“Optimal traffic planning for efficcient evacuation”, *Journal of Advanced College of Engineering and Management*, Vol.1, 119-126, 2015.