PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VỚI VẤN ĐỀ DỰ ĐOÁN VÀ KIỂM SOÁT DÂN SỐ

Phạm Hồng Trường*, **Nguyễn Thị Thu Hằng, Bùi Thị Hồng Hạnh**
Trường Đại học Kinh tế và Quản trị Kinh doanh – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài báo này sử dụng phương trình vi phân áp dụng vào việc phân tích, dự đoán và kiểm soát vấn đề dân số.

Từ khóa: *Dân số, phương trình vi phân, mô hình toán học.*

MỞ ĐẦU

Vấn đề dân số hiện đang là một trong các vấn đề được tất cả các nước trên thế giới quan tâm. Có thể nói đây là một bài toán chưa có lời giải chi tiết và cũng chưa có đáp án cụ thể. Ở nhiều quốc gia, việc điều chỉnh các chính sách về dân số không hợp lý không chỉ dẫn đến việc dân số tăng quá nhanh mà cơ cấu tuổi cũng không hợp lý làm cho vấn đề kiểm soát dân số trở lên khó khăn.

Với thực trạng tăng trưởng dân số quá nhanh, việc xây dựng một mô hình toán học để mô tả quá trình phát triển dân số nhằm nghiên cứu, phân tích, dự báo và kiểm soát tốc độ tăng trưởng dân số là rất quan trọng.

Bài báo này sử dụng phương trình vi phân nhằm xây dựng mô hình toán học áp dụng vào việc phân tích, dự đoán và kiểm soát vấn đề dân số.

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BIỂU THỊ SỰ PHÁT TRIỂN DÂN SỐ

Nguyên nhân của việc thay đổi kết cấu dân số và số lượng dân số là do tỷ lệ sinh, tỷ lệ tử vong và dân di cư. Để đơn giản ta chỉ xem xét đến vấn đề sinh và vấn đề tử vong tự nhiên, không bao gồm các ảnh hưởng của nhân tố di cư.

Tại thời điểm t, kí hiệu $F(r,t)$ là số người có tuổi nhỏ hơn r, trong đó t và r là các biến liên tục. Giả sử $F(r,t)$ là hàm liên tục, khả vi. Ta gọi F là hàm phân bố dân số. Kí hiệu $N(t)$ là tổng số người tại thời điểm t và r_m là người có tuổi cao nhất (giả sử trên thực tế $r_m \to +\infty$).

Như vậy, hàm $F(r,t)$ là hàm số không âm, không giảm và

$$\begin{cases} F(0,t) = 0 \\ F(r_m,t) = N(t) \end{cases} \quad (1)$$

Ta định nghĩa hàm mật độ tuổi như sau

$$p(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}, 0 \le r \le r_m \quad (2)$$

Biểu thức $p(r,t)dr$ biểu thị số người có độ tuổi trong khoảng $[r; r+dr)$ tại thời điểm t. Hàm $p(r,t)$ không âm và

$$p(r_m,t) = 0 \quad (3)$$

Kí hiệu $\mu(r,t)$ là tỉ lệ tử vong của người ở độ tuổi r tại thời điểm t. Khi đó $\mu(r,t)p(r,t)dr$ biểu thị số người có độ tuổi trong khoảng $[r; r+dr)$ tử vong trong một đơn vị thời gian tại thời điểm t.

Để đạt được phương trình vi phân thỏa mãn $p(r,t)$, ta xem xét trường hợp những người có độ tuổi trong khoảng $[r; r+dr)$ từ thời điểm t đến thời điểm $t+dt$. Tuổi của một bộ phận những người đó biến động trong khoảng $[r+dr_1; r+dr+dr_1)$, trong đó $dr_1 = dt$. Mặt khác, trong khoảng thời gian dt, số người tử vong là $\mu(r,t)p(r,t)drdt$. Do vậy

$$p(r,t)dr - p(r+dr_1, t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$$

hay

$$[p(r+dr_1,t+dt) - p(r,t+dt)] + [p(r,t+dt) - p(r,t)]dr = -\mu(r,t)p(r,t)drdt$$

vì $dr_1 = dt$ nên

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t) \quad (4)$$

Đây là một dạng phương trình vi phân của hàm mật độ tuổi $p(r,t)$, trong đó tỉ lệ tử vong là hàm số $\mu(r,t)$ đã biết.

Phương trình (4) có:

- Hàm mật độ ban đầu: $p(r,0) = p_0(r)$;

* *Tel: 0968 832638, Email: shanghaichina888@yahoo.com*

- Số trẻ em được sinh ra trong một đơn vị thời gian là: $p(0,t) = f(t)$ (gọi là tỉ lệ trẻ em sinh ra). $p_0(r)$ tính toán được từ các số liệu điều tra dân số và là hàm số đã biết.

Tiếp theo, ta tiến hành phân tích vai trò của $f(t)$ trong việc dự đoán và kiểm soát dân số. Ta có:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t), t \geq 0, 0 \leq r \leq r_m \\ p(r,0) = p_0(r) \\ p(0,t) = f(t) \\ p(r_m,t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

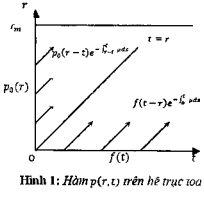
Hệ phương trình này đã diễn tả quá trình biến đổi dân số. Từ hệ phương trình này, sau khi xác định được hàm mật độ $p(r,t)$, ta tính được số lượng người ở mỗi độ tuổi, tức là xác định được hàm phân bố dân số

$$F(r,t) = \int_0^r p(s,t)ds \quad (6)$$

Hệ phương trình (5) giải tương đối phức tạp. Trong bài báo này chúng tôi chỉ đưa ra kết quả của một trường hợp đặc biệt. Trong trường hợp xã hội ổn định và trong một khoảng thời gian không quá dài, tỷ lệ tử vong về cơ bản không phụ thuộc vào thời gian, do đó ta có thể giả sử rằng $\mu(r,t) = \mu(r)$. Khi đó, lời giải của (5) là

$$p(r,t) = \begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r} \mu(s)\,ds}, 0 \leq t \leq r \\ f(t-r)e^{-\int_0^r \mu(s)ds}, t > r \end{cases} \quad (7)$$

Kết quả này được giải thích rõ ràng hơn trong đồ thị sau.



Hình 1: *Hàm p(r,t) trên hệ trục toạ độ Otr*

Với phần mặt phẳng $t < r$, $p(r,t)$ hoàn toàn do mật độ tuổi ban đầu $p_0(r-t)$ của những người có tuổi $t-r$ và tỉ lệ tử vong $\mu(s)$ (với $r-t \leq s < t$) quyết định; với phần mặt phẳng $t > r$, $p(r,t)$ sẽ do tình hình sinh đẻ tương lai $f(t-r)$ và tỉ lệ tử vong $\mu(s)$ (với $0 \leq s < r$) quyết định.

TỈ LỆ SINH VÀ MÔ HÌNH SINH

Trong phương trình (5) hoặc (7), từ số liệu thống kê dân số ta có được $p_0(r)$ và $\mu(r)$. Mặt khác, $\mu(r,t)$ cũng có thể tính được từ $\mu(r,0)$. Như vậy, để dự đoán và kiểm soát được tình hình phát triển của dân số, ta chủ yếu quan tâm và dùng phương pháp tác động đến tỉ lệ sinh $f(t)$.

Kí hiệu $k(r,t)$ là hàm so sánh giới tính nữ, khi đó số giới tính nữ có tuổi trong khoảng $[r; r+dr)$ tại thời điểm t là $k(r,t)p(r,t)dr$. Kí hiệu $b(r,t)$ là số trẻ em sinh bình quân của mỗi phụ nữ trên trong một đơn vị thời gian. Giả sử khoảng độ tuổi sinh đẻ là $[r_1; r_2]$, khi đó

$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)dr \quad (8)$$

Lại có, $b(r,t)$ lại được định nghĩa là

$$b(r,t) = \beta(t)h(r,t) \quad (9)$$

trong đó, $h(r,t)$ thỏa mãn

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr = 1 \quad (10)$$

do đó:

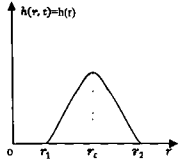
$$\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr \quad (11)$$

$$f(t) = \beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr \quad (12)$$

Từ công thức (11), có thể thấy rằng, $\beta(t)$ có ý nghĩa là bình quân số lượng phụ nữ sinh đẻ trong một đơn vị thời gian tại thời điểm t. Nếu tất cả phụ nữ trong độ tuổi sinh đẻ đều duy trì số lượng sinh trong khoảng thời gian này thì $\beta(t)$ cũng là tổng số số lượng sinh của bình quân mỗi phụ nữ trong cuộc đời. Do vậy, ta gọi $\beta(t)$ là tổng số số lượng sinh (gọi tắt là tổng tỉ lệ sinh).

Từ công thức (9), (10) và ý nghĩa của $b(r,t)$, có thể thấy rằng $h(r,t)$ là yếu tố sinh sản của phụ nữ tại tuổi r và được gọi là mô hình sinh. Trong một hoàn cảnh sống ổn định, có thể thấy rằng t không ảnh hưởng đến $h(r,t)$, tức là $h(r,t) = h(r)$. Như đã giải thích ở trên, $h(r)$ biểu thị trong những độ tuổi nào tỉ lệ sinh cao, trong những độ tuổi nào tỉ lệ sinh thấp. Hình 2 cho thấy ý nghĩa hình học của

$h(r)$. Rõ ràng, tỉ lệ sinh là cao nhất trong những lân cận $r = r_c$.



Hình 2. *Ý nghĩa đồ thị của mô hình sinh $h(r)$.*

Từ số liệu thống kê dân số, ta có thể biết được $h(r,t)$ thực tế trước đó. Khi tiến hành nghiên cứu, người ta thường biểu diễn khác của $h(r)$ thông qua một hình thức biểu diễn khác trong xác suất thống kê là phân bố Γ.

$$h(r) = \frac{(r-r_1)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{(r-r_1)}{\theta}}}{\theta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}, \quad r > r_1 \qquad (13)$$

Khi $\theta = 2, \alpha = n/2$ thì $r_c = r_1 + n - 2$ (14)

Có thể thấy rằng, nếu tăng r_1 có nghĩa là người phụ nữ kết hôn muộn và nếu tăng n thì có nghĩa là người phụ nữ sinh đẻ muộn.

Như vậy, phương trình phát triển dân số (5) và số lượng trẻ sơ sinh $f(t)$ sinh ra trong đơn vị thời gian biểu thị theo công thức (12) lập thành mô hình dân số theo hàm liên tục. Trong mô hình đó, hàm số tỉ lệ tử vong $\mu(r,t)$, hàm số sánh giới tính $k(r,t)$ và hàm mật độ ban đầu $p_0(r)$ có thể trực tiếp có được từ số liệu thống kê dân số hoặc từ những ước tính cơ sở ban đầu của số liệu thống kê dân số; $\beta(t)$ có vai trò kiểm soát mức độ sinh; $h(r,t)$ có vai trò khống chế thời điểm và mật độ sinh.

Từ quan điểm về vấn đề kiểm soát sự phát triển của dân số, có thể thấy rằng, trong hệ thống dân số của mô hình (5), $p(r,t)$ có thể coi là biến trạng thái, $p(0,t) = f(t)$ biểu thị là biến kiểm soát và là hàm kiểm soát biên của hệ thống tham số phân bố.

Trong công thức (7), $f(t-r)$ biểu thị rằng nếu như chính sách dân số sai lầm, sẽ làm cho $p(r,t)$ tăng trưởng rất nhanh trong một khoảng thời gian, lại muốn thông qua phương pháp điều chỉnh $\beta(t)$ và $h(r,t)$ làm giảm tình hình tăng trưởng dân số xuống thấp, đó là một việc khó khăn và cần rất nhiều thời gian (có thể cần phải trải qua một vài thế hệ).

CHỈ SỐ DÂN SỐ

Trong mô hình trên, hàm mật độ $p(r,t)$ hoặc hàm phân bố $F(r,t)$ là mô tả hoàn chỉnh nhất của phương trình phát triển dân số, nhưng khi sử dụng, công thức này lại không thuận tiện. Trong việc thống kê dân số, thường dùng một vài chỉ số đơn giản sau đây để mô tả đặc trưng dân số của một vài khu vực hoặc một vài quốc gia.

(i). Tổng dân số $N(t)$:

$$N(t) = \int_0^{r_m} p(r,t)dr \qquad (15)$$

(ii). Độ tuổi bình quân $R(t)$:

$$R(t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^{r_m} rp(r,t)dr \qquad (16)$$

(iii). Tuổi thọ bình quân $S(t)$: biểu thị người sinh ra vào thời điểm t dù là sống đến khi nào, tỉ lệ tử vong đều dựa vào $\mu(r,t)$ của thời điểm t để tính toán, thời gian sống của những người này

$$S(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\int_0^{\tau} \mu(r,t)dr} d\tau \qquad (17)$$

Trên thực tế, $S(t)$ là dự tính tuổi thọ. Thông thường nói, bình quân tuổi thọ đạt bao nhiêu tuổi thì đó chính là tuổi thọ ước tính của các trẻ em sinh ra trong thời điểm đó, tức là $S(0)$. Dựa vào tư liệu thống kê, ta có thể tính được tỉ lệ tử vong $\mu(r,0)$, từ đó ta tính được $S(0)$.

(iv). Chỉ số tuổi lão hóa $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{R(t)}{S(t)} \qquad (18)$$

Dễ thấy $\omega(t)$ tỉ lệ thuận với $R(t)$. Đối với các khu vực hoặc các quốc gia có $R(t)$ tương đồng, nếu bình quân tuổi thọ càng lớn, nghĩa là dân số vùng đó có sức khỏe tốt, thời gian có thể tham gia lao động trong cuộc đời càng nhiều thì chỉ số lão hóa càng $\omega(t)$ nhỏ.

(v). Chỉ số nương tựa (chỉ số sống phụ thuộc) $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \frac{N(t) - L(t)}{L(t)} \qquad (19)$$

$$L(t) = \int_{l_1}^{l_2} [1 - k(r,t)] p(r,t)dr - \int_{l_1'}^{l_2'} k(r,t)p(r,t)dr \qquad (20)$$

trong đó, $[l_1; l_2]$ và $[l_1'; l_2']$ lần lượt là tuổi của nam và nữ trong độ tuổi có khả năng lao động; $L(t)$ là số lượng dân số có khả năng

lao động. Do vậy, chỉ số nương tựa $\rho(t)$ biểu thị bình quân số người mà mỗi người lao động cần nuôi dưỡng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Mark M. Meerschaert, (2013), *Mathematical Modelling*, 4th Edition, Academic Press.
2. Vicente Montesinos, Peter Zizler, Václav Zizler, (2015), *An Introduction to Modern Analysis*, Springer.
3. Tổng cục thống kê, (2011), *Cấu trúc tuổi - Giới tính và tình trạng hôn nhân của dân số Việt Nam*, Bộ Kế hoạch và Đầu tư.
4. Tổng cục thống kê, (2011), *Giáo dục ở Việt Nam: Phân tích các chỉ số chủ yếu*, Bộ Kế hoạch và Đầu tư.
5. Tổng cục thống kê, (2011), *Mức sinh và mức chết ở Việt Nam: Thực trạng, xu hướng và những khác biệt*, Bộ Kế hoạch và Đầu tư.
6. Trường Đại học Kinh tế Quốc dân, (2011), *Giáo trình dân số và phát triển*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân.
7. Ủy ban Thường vụ Quốc hội, Số: 06/2003/PL-UBTVQH11, (2003), *Pháp lệnh dân số.*

SUMMARY

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE ESTIMATION AND CONTROL OF POPULATION

Pham Hong Truong*, Nguyen Thi Thu Hang, Bui Thi Hong Hanh

College of Economics and Business Administration - TNU

This paper uses the differential equations applying for analyzing, estimating and controlling the population problem.

Keywords: *Population, Differential equations, Mathematical model.*

Ngày nhận bài: 30/7/2015; Ngày phản biện: 20/8/2015; Ngày duyệt đăng: 15/3/2016

Phản biện khoa học: *TS. Nguyễn Văn Minh – Trường Đại học Kinh tế & Quản trị kinh doanh - ĐHTN*

* *Tel. 0968 832638, Email. shanghaichina888@yahoo.com*