

## TỐI THIỂU HÓA TỔNG THỜI GIAN HOÀN THÀNH CÁC CÔNG VIỆC CÓ TRỌNG SỐ KHÁC NHAU TRÊN MÔ HÌNH MÁY ĐƠN TRONG SẢN XUẤT

Phạm Hồng Trường<sup>1</sup>, Nguyễn Quỳnh Hoa<sup>2</sup>,  
Phạm Thị Linh<sup>3</sup>

### Tóm tắt

Bài báo trình bày về vấn đề tối thiểu hóa tổng thời gian hoàn thành các công việc trên mô hình máy đơn, đồng thời đưa ra quy tắc WSPT (Weighted Shortest Processing Time first) là điều kiện cần và đủ của vấn đề tối ưu. Nếu sắp xếp các công việc theo thứ tự không tăng của tỷ số  $\frac{\omega_j}{p_j}$  để thực hiện (trong đó,  $p_j$  và  $w_j$  lần lượt là thời gian thực hiện và trọng số của công việc  $T_j$ ), thì tổng thời gian hoàn thành các công việc sẽ đạt giá trị nhỏ nhất. Ngược lại, nếu một dãy các công việc có trọng số khác nhau thực hiện có tổng thời gian hoàn thành là nhỏ nhất thì khi đó dãy các công việc sẽ có sắp xếp tuân theo quy tắc WSPT.

**Từ khóa:** Sắp xếp tối ưu, tối ưu hóa, mô hình toán học, thời gian hoàn thành.

### MINIMIZING THE TOTAL WEIGHTED COMPLETION TIME OF JOBS ON THE SINGLE MACHINE MODEL

#### Abstract

The paper presented the minimum total weighted completion time of jobs on the single machine model. Simultaneously, it indicated that WSPT rule (Weighted Shortest Processing Time first) is a necessary and sufficient condition for the optimization problem. The optimal solution of this one machine problem is obtained if we sequence the jobs according to non-increasing ratios  $\frac{\omega_j}{p_j}$ .

**Keywords:** Optimal arrangement, Optimization, Mathematical model, Completion time.

### 1. Giới thiệu

Vấn đề trình tự sắp xếp là một vấn đề tổ hợp tối ưu hóa quan trọng, đó là sử dụng một số máy xử lý, máy móc, nguồn lực để hoàn thành tối ưu một số lượng nhiệm vụ hoặc công việc đã cho. Khi thực hiện giải quyết những nhiệm vụ hoặc những công việc này, cần thỏa mãn một số điều kiện giới hạn như: Thời gian đạt đến, thời gian hạn định phải hoàn thành, thứ tự thực hiện các nhiệm vụ... Mục đích là làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị tối ưu, trong đó hàm mục tiêu thông thường là khoảng thời gian thực hiện, cách thức hiệu suất sử dụng của máy xử lý.

Trong phân loại vấn đề trình tự sắp xếp, nếu như tất cả những dữ liệu số liệu đều được biết trước khi tiến hành thực hiện thì được gọi là vấn đề trình tự sắp xếp xác định. Nếu như có một vài dữ liệu số liệu chưa được biết, những số liệu đó là một vài biến lượng ngẫu nhiên, nhưng sự phân bố của chúng là đã biết, khi đó vấn đề này được gọi là vấn đề trình tự sắp xếp ngẫu nhiên. Dù là vấn đề trình tự sắp xếp ngẫu nhiên hay xác định, ta đều có thể giả sử như sau:

(1) Số nhiệm vụ (hoặc công việc) và số máy xử lý là hữu hạn.

(2) Trong bất kỳ một khoảng thời gian trên bất kỳ 1 máy xử lý nào chỉ được xử lý duy nhất một nhiệm vụ hoặc thứ tự nhiệm vụ nào đó.

Ba yếu tố: Máy xử lý, nhiệm vụ (hoặc công việc) và hàm mục tiêu tạo thành vấn đề trình tự sắp xếp. Số lượng loại hình và điều kiện của các máy xử lý có gần 10 trường hợp khác nhau, điều kiện ràng buộc của các nhiệm vụ (công việc) và dữ liệu hiện có cực kỳ phức tạp và rắc rối, thêm vào đó là yêu cầu cần đặt ra không giống nhau của các hàm mục tiêu đã tạo ra nhiều loại hình trình tự sắp xếp phong phú đa dạng.

Ta dùng ba thành phần cơ bản trong dạng thức các loại hình của vấn đề trình tự sắp xếp như sau:

$$\alpha | \beta | \gamma$$

Trong đó, vị trí  $\alpha$  biểu thị số lượng loại hình, điều kiện máy xử lý, vị trí đó có thể là:

- + 1: máy đơn (1 máy xử lý).
- +  $P_m$ : m máy đồng tốc.
- +  $Q_m$ : m máy hằng tốc.

Vị trí  $\beta$  biểu thị tính chất, hạn chế, yêu cầu, chủng loại dữ liệu. Số lượng và điều kiện ràng buộc ảnh hưởng của các nhiệm vụ (hoặc công việc). Vị trí này có thể có cùng lúc nhiều điều kiện theo yêu cầu của vấn đề. Vị trí đó có thể là:

+  $r_i$ : Các nhiệm vụ có thời gian đạt đến không giống nhau. Nếu vị trí  $\beta$  không có mặt  $r_i$ , điều đó có nghĩa là  $r_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

+  $pmtn$ : Thời gian thực hiện có thể gián đoạn.

Nếu vị trí  $\beta$  không có xuất hiện những yêu cầu này, điều đó có nghĩa là tập nhiệm vụ là

không có quan hệ (các nhiệm vụ không có ràng buộc lẫn nhau).

Vị trí  $\gamma$  biểu thị hàm mục tiêu cần tối ưu hóa, vị trí đó có thể là:

+  $C_{max}$ : Độ dài thời gian biểu tối đa;

+  $\sum C_j$ : Tổng thời gian hoàn thành;

+  $\sum \omega_j C_j$ : Tổng thời gian hoàn thành của các công việc có trọng số khác nhau.

Vấn đề trình tự sắp xếp trên máy đơn là một trong những vấn đề trình tự sắp xếp đơn giản nhất, đồng thời cũng là một trong những vấn đề sắp xếp quan trọng nhất. Vấn đề trình tự sắp xếp trên máy đơn tương đối dễ tìm ra phương pháp giải quyết, những phương pháp này có những tác dụng cụ thể đối với việc nghiên cứu những vấn đề trình tự sắp xếp phức tạp hơn, có thể giúp cho việc tìm ra những thuật toán xấp xỉ đối với những vấn đề trình tự sắp xếp trên máy đơn được giới thiệu là những vấn đề tồn tại trong cuộc sống hiện thực, có bối cảnh thực tế. Vì vậy, vấn đề trình tự sắp xếp trên máy đơn có phạm vi ứng dụng lớn, nâng cao hiệu suất lao động, có ý nghĩa cực kỳ to lớn [2, 5]. Trong quá trình tìm phương pháp giải quyết trình tự sắp xếp, chúng ta thường giả sử rằng một vài tham số của các công việc đã được biết trước như: Thời gian thực hiện của mỗi công việc, tầm quan trọng của mỗi công việc (giá thành của mỗi công việc), thời gian trễ của mỗi công việc trong quá trình tham gia vào quá trình thực hiện... Mục tiêu đặt ra là phải lập trình sắp xếp các công việc đó để tìm được lời giải tối ưu. Việc tìm ra và thiết lập được kế hoạch thực hiện tối ưu sẽ giúp cho nhà sản xuất đảm bảo các điều kiện: Đáp ứng kì hạn giao hàng, tối thiểu hóa sự chậm trễ (nếu có) của các công việc tham gia vào quá trình thực hiện, tối thiểu hóa tổng thời gian hoàn thành công việc, tối thiểu hóa thời gian gia hạn thực hiện các sản phẩm...

Một trong những hàm mục tiêu quan trọng của vấn đề trình tự sắp xếp trên máy đơn là cực tiểu hóa tổng thời gian hoàn thành thực hiện của các nhiệm vụ có trọng số khác nhau. Peter Brucker đã đưa ra điều kiện đủ để một dãy các công việc  $T_1, T_2, \dots$  là một trình tự tối ưu đối với

vấn đề cực tiểu hóa thời gian hoàn thành thực hiện của các nhiệm vụ có trọng số khác nhau. Đó là dãy công việc đó phải thỏa mãn quy tắc WSPT (Weighted Shortest Processing Time first) thì đạt được trình tự sắp xếp tối ưu. Theo quy tắc này, các nhiệm vụ dựa vào thứ tự không tăng của tỷ số  $\frac{\omega_j}{p_j}$  để thực hiện.

Trong bài báo này chúng tôi giới thiệu về vấn đề tối thiểu hóa tổng thời gian hoàn thành thực hiện của các công việc có trọng số khác nhau, trên mô hình máy đơn (một máy) đồng thời đưa ra điều kiện cần và đủ của vấn đề tối ưu đối với vấn đề đó.

## 2. Vấn đề tổng thời gian hoàn thành thực hiện các công việc có trọng số khác nhau trên mô hình máy đơn

Trước hết, chúng tôi đưa ra một số kí hiệu như sau:

$T_j$  là công việc thứ  $j$  trong một dãy các công việc đưa ra;

$p_j$  là thời gian thực hiện của công việc  $T_j$ ;

$w_j$  là thời trọng số của công việc  $T_j$ ;

$C_j = \sum_{s=1}^j p_s$  là thời gian hoàn thành của công việc  $T_j$ .

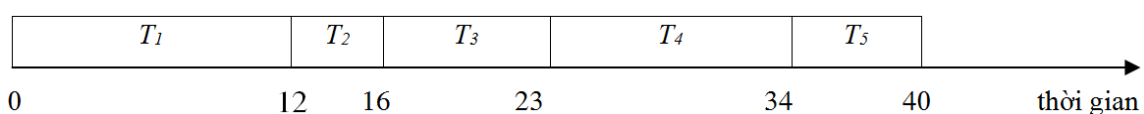
Khi đó,  $\sum_{j=1}^n \omega_j C_j$  là tổng thời gian hoàn thành của các công việc có trọng số khác nhau từ  $T_1$  đến  $T_n$ .

Vấn đề 1  $\|\sum_{j=1}^n \omega_j C_j$  được gọi là vấn đề tổng thời gian hoàn thành thực hiện của các công việc có trọng số khác nhau trên mô hình máy đơn. Nhiệm vụ là phải tối thiểu hoá tổng thời gian hoàn thành  $\sum_{j=1}^n \omega_j C_j$ . Vấn đề tối thiểu hoá  $\sum_{j=1}^n \omega_j C_j$  được gọi là vấn đề tối thiểu hóa tổng thời gian hoàn thành thực hiện của các công việc có trọng số khác nhau, trên mô hình máy đơn.

Xét bài toán sau: Tính tổng thời gian hoàn thành của các công việc có trọng số khác nhau được sắp thứ tự lần lượt từ công việc  $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_4 \rightarrow T_5$  với các dữ liệu cho theo bảng sau:

Công việc ( $T_j$ )	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
Thời gian thực hiện tương ứng ( $p_j$ ) (đơn vị tính: phút)	12	4	7	11	6
Trọng số $w_j$	4	2	5	5	6

Ta có:



Khi đó, tổng thời gian hoàn thành 5 công việc có trọng số khác nhau là:

$$\sum_{j=1}^n \omega_j C_j = 4.12 + 2.16 + 5.23 + 5.34 + 6.40 = 605 \text{ (phút)}$$

Mặt khác, nếu thay đổi thứ tự các công việc thành  $T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_1 \rightarrow T_5 \rightarrow T_4$ . Với cách tính tương tự, ta có, tổng thời gian hoàn thành 5 công việc có trọng số khác nhau là:

$$\sum_{j=1}^n \omega_j C_j = 2.4 + 5.11 + 4.23 + 6.29 + 5.40 = 529 \text{ (phút)} < 605 \text{ (phút)}$$

Như vậy, có thể thấy rằng, khi thay đổi thứ tự thực hiện các công việc, thì tổng  $\sum_{j=1}^n \omega_j C_j$  có thể khác nhau. Vậy, vấn đề đặt ra là, khi thực hiện thực hiện một tập hợp các công việc với thời gian thực hiện các công việc đã được định sẵn, thì thứ tự thực hiện của các công việc đó nên sắp xếp thế nào để tổng thời gian hoàn thành các công việc đạt giá trị nhỏ nhất? Sau đây chúng ta nghiên cứu vấn đề đó.

P. Brucker đã chứng minh được kết quả sau đây:

*Quy tắc WSPT (Weighted Shortest Processing Time first) giải quyết vấn đề tối ưu đối với vấn đề tối thiểu hoá tổng thời gian hoàn thành các công việc có trọng số khác nhau trên mô hình máy đơn.*

Trong đó, quy tắc WSPT: là quy tắc sắp xếp thứ tự các công việc thực hiện theo thứ tự không tăng của tỷ số  $\frac{\omega_j}{p_j}$  để thực hiện. Áp dụng quy tắc WSPT ta đạt được trình tự sắp xếp tối ưu.

Tuy nhiên, điều ngược lại chưa được chứng minh. Nghĩa là Khi dãy các công việc được sắp xếp theo trình tự tối ưu (tổng thời gian hoàn thành các công việc trên mô hình máy đơn là nhỏ nhất) thì thứ tự các công việc có thoả mãn quy tắc WSPT hay không?

**Định lý:** Điều kiện cần và đủ của vấn đề tối ưu đối với vấn đề tối thiểu hoá tổng thời gian hoàn thành các công việc có trọng số khác nhau trên mô hình máy đơn là dãy các công việc sắp xếp tuân theo quy tắc WSPT.

**Chứng minh:**

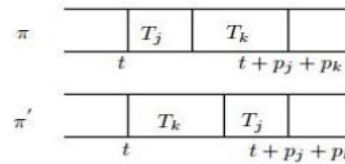
- Nếu dãy các công việc đã cho sắp xếp theo quy tắc WSPT thì theo P. Brucker [3] dãy đã cho là tối ưu. Nghĩa là khi đó, tổng thời gian hoàn thành các công việc trên mô hình máy đơn là nhỏ nhất.

- Ta sẽ chứng minh điều ngược lại. Giả sử dãy  $n$  công việc đã cho là tối ưu (giả sử dãy tối ưu được kí hiệu là dãy  $\pi$ ). Ta phải chứng minh dãy công việc đó tuân theo quy tắc WSPT. Thật vậy.

Giả sử dãy trình tự tối ưu  $\pi$  không tuân theo quy tắc WSPT. Khi đó, trong dãy trình tự này tồn tại ít nhất hai nhiệm vụ cạnh nhau  $T_j$  và  $T_k$  ( $T_j$

đứng trước  $T_k$ ) sao cho  $\frac{\omega_j}{p_j} < \frac{\omega_k}{p_k}$ . Giả sử nhiệm vụ

$T_j$  bắt đầu gia công vào thời điểm  $t$ . Ta thay đổi thứ tự trong  $\pi$  như sau: đối với hai nhiệm vụ  $T_j$  và  $T_k$  và giữ nguyên vị trí các nhiệm vụ còn lại, ta được một dãy trình tự khác, giả sử là  $\pi'$



Sơ đồ thay đổi vị trí gia công của nhiệm vụ  $T_j$  và  $T_k$

Như vậy, trong dãy  $\pi'$ , thời gian bắt đầu gia công của  $T_k$  là  $t$ ,  $T_j$  ngay sau  $T_k$ .

Để thấy rằng, sự khác biệt về tổng thời gian hoàn thành các nhiệm vụ có trọng số khác nhau trên  $\pi$  và  $\pi'$  chỉ phụ thuộc vào tổng thời gian hoàn thành đối với nhiệm vụ  $T_j$  và  $T_k$ .

Trong dãy trình tự  $\pi$ , thời gian hoàn thành (của các nhiệm vụ có trọng số khác nhau) của  $T_j$  và  $T_k$  là:

$$(t + p_j)\omega_j + (t + p_j + p_k)\omega_k$$

Còn trong dãy trình tự  $\pi'$  thời gian hoàn thành (của các nhiệm vụ có trọng số khác nhau) của  $T_j$  và  $T_k$  là:

$$(t + p_k)\omega_k + (t + p_k + p_j)\omega_j$$

Do đó, chênh lệch của tổng thời gian hoàn thành (của các nhiệm vụ có trọng số khác nhau) của hai dãy trình tự là

$$\begin{aligned} & \left( \sum w_j C_j \right)_{\pi} - \left( \sum w_j C_j \right)_{\pi'} \\ &= (t + p_j)\omega_j + (t + p_j + p_k)\omega_k - (t + p_k)\omega_k \\ & \quad - (t + p_k + p_j)\omega_j \\ &= \omega_k p_j - \omega_j p_k = p_j p_k \left( \frac{\omega_k}{p_k} - \frac{\omega_j}{p_j} \right) \end{aligned}$$

Do  $\frac{\omega_j}{p_j} < \frac{\omega_k}{p_k}$  nên trình tự  $\pi$  không phải là

trình tự tối ưu. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Quay trở lại với ví dụ trên, áp dụng quy tắc WSPT, ta có trình tự tối ưu là  $[T_5, T_3, T_2, T_4, T_1]$  và tổng thời gian hoàn thành của các nhiệm vụ có trọng số khác nhau là:

$$\sum_{n=1}^5 \omega_j C_j = 6.6 + 13.5 + 17.2 + 28.5 + 40.4 = 435 \text{ (phút)}$$

**3. Kết luận**

Bài báo đã trình bày về vấn đề tối thiểu hoá tổng thời gian hoàn thành các công việc có trọng số khác nhau trên mô hình máy đơn, đồng thời chứng minh được điều kiện cần và đủ của vấn đề tối ưu, đối với vấn đề này đó là quy tắc WSPT. Tức là, nếu sắp xếp các công việc theo thứ tự

không tăng của tỷ số  $\frac{\omega_j}{p_j}$  để thực hiện, thì tổng thời gian hoàn thành các công việc sẽ đạt giá trị nhỏ nhất. Ngược lại, nếu một dãy các công việc có trọng số khác nhau thực hiện có tổng thời gian

hoàn thành là nhỏ nhất thì khi đó dãy sắp xếp các công việc tuân theo quy tắc WSPT.

### **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1]. Nguyễn Việt Hưng. (2016). Một số vấn đề sắp xếp lập kế hoạch gia công tối ưu trên mô hình máy đơn. *Luận văn thạc sĩ*, Toán ứng dụng. Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.
- [2]. P.H. Truong & L.X. Wen. (2014). The inverse Parallel Machine Scheduling Problem With Minimum Total Completion Time. *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol 10(2), 613-620.
- [3]. P. Brucker. (2011). *Scheduling algorithms*. Berlin: Springer.
- [4]. M. Pinedo. (1995). *Scheduling: Theory, Algorithm and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [5]. Y. Lin & X. Wang. (2007). Necessary and sufficient conditions of optimality for some classical scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, Vol 176, 809-818.

---

#### **Thông tin tác giả:**

##### **1. Phạm Hồng Trường**

- Đơn vị công tác: Khoa KHCB – Trường ĐH Kinh tế & QTKD  
- Địa chỉ email: *phamhongtruong888@gmail.com*

##### **2. Nguyễn Quỳnh Hoa**

- Đơn vị công tác: Khoa KHCB – Trường ĐH Kinh tế & QTKD

##### **3. Phạm Thị Linh**

- Đơn vị công tác: Khoa KHCB – Trường ĐH Kinh tế & QTKD

Ngày nhận bài: 02/08/2017

Ngày nhận bản sửa: 11/12/2017

Ngày duyệt đăng: 15/01/2018