

## MÔ HÌNH TOÁN HỌC TRONG VIỆC PHÂN CHIA CÔNG BẰNG THEO TỶ LỆ

Phạm Hồng Trường

### Tóm tắt

Bài báo này trình bày một ví dụ về việc phân chia không công bằng trong việc phân chia theo tỷ lệ. Bằng việc sử dụng mô hình toán học, bài báo áp dụng vào việc phân tích sự không công bằng trong phân chia theo tỷ lệ, từ đó đề xuất mô hình toán học để khắc phục cho việc phân chia được công bằng.

**Từ khóa:** Mô hình toán học, tỉ lệ, toán học ứng dụng.

### MATHEMATIC MODEL IN PROPORTIONAL FAIR DIVISION

#### Abstract

This paper is to show an example of unfair division in proportional division. This paper applied the mathematic model to analyze proportional unfairness division, thereby, proposing a mathematic model to deal with unfair division.

**Keywords:** Mathematical model, proportion, applied mathematics.

#### 1. Mở đầu

Thông thường, khi phân chia một lượng công việc, hay phân chia quyền lợi cho một số nhóm đối tượng nào đó ta thường phân chia theo tỉ lệ số lượng (J. N. Kapur, 1988; Mark M. Meerschaert, 2013 và R. Aris, 1979). Tuy nhiên, việc phân chia như vậy không phải lúc nào cũng được phân chia công bằng. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một ví dụ về việc phân chia không công bằng khi phân chia theo tỉ lệ. Chúng tôi sử dụng mô hình toán học áp dụng vào việc phân tích sự không công bằng trong phân chia của ví dụ đã nêu, từ đó đề xuất mô hình toán học khắc phục cho việc phân chia đó.

Chúng ta xét một vấn đề trong bài toán phân chia theo tỷ lệ như sau:

Một trường đại học có 03 khoa, tổng cộng có 200 giảng viên (Khoa 1 có 100 giảng viên, khoa 2 có 60 giảng viên, khoa 3 có 40 giảng viên). Nhà trường chuẩn bị phân công giảng viên tham gia công tác coi thi Tốt nghiệp THPT Quốc gia. Số giảng viên cần điều động tham gia là 20 người, phân chia cho 03 khoa theo tỉ lệ giảng viên của các khoa. Dễ thấy rằng, cách chia đơn giản và công bằng là chia theo tỉ lệ giảng viên của các khoa.

Ta thu được kết quả như sau:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên	10	6	4

Vấn đề đặt ra là, nếu khoa 1 có 103 giảng viên, khoa 2 có 63 giảng viên, khoa 3 có 34 giảng viên (tổng số giảng viên vẫn là 200 giảng viên) thì số giảng viên sẽ được phân chia như dưới đây.

Khoa	Số giảng viên	Tỉ lệ giảng viên (%)	Số giảng viên
Khoa 1	103	51,5	10,3
Khoa 2	63	31,5	6,3
Khoa 3	34	17,0	3,4
<b>Tổng</b>	<b>200</b>	<b>100,0</b>	<b>20,0</b>

Chú ý rằng, tổng số lượng giảng viên của phần nguyên là 19 giảng viên, vẫn chưa đủ 20 giảng viên. Sau khi phân chia 19 giảng viên cho

03 khoa, còn lại 01 giảng viên được chia cho khoa 3 (vì khoa 3 có phần dư trong tỉ lệ là cao nhất). Như vậy:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên ứng	10	6	4

Nguồn: Khảo sát của tác giả

Mặt khác, do trong danh sách phân công giảng viên tham gia công tác coi thi Tốt nghiệp THPT Quốc gia cần có 01 giảng viên dự bị, nên

Nhà trường đã quyết định bổ sung thêm 01 giảng viên. Như vậy, tổng số giảng viên là 21. Khi đó, tổng số giảng viên được phân chia lại như sau:

Khoa	Số giảng viên	Tỉ lệ giảng viên (%)	Cách phân chia theo số lượng 20 giảng viên		Cách phân chia theo số lượng 21 giảng viên	
			Số giảng viên	Số giảng viên phân chia theo tỉ lệ thông thường	Số giảng viên	Số giảng viên phân chia theo tỉ lệ thông thường
Khoa 1	103	51,5	10,3	10	10,815	11
Khoa 2	63	31,5	6,3	6	6,615	7
Khoa 3	34	17,0	3,4	4	3,570	3
<b>Tổng</b>	<b>200</b>	<b>100,0</b>	<b>20,0</b>	<b>20</b>	<b>21,000</b>	<b>21</b>

Để nhận thấy rằng việc phân chia này không công bằng. Trong khi tăng số giảng viên tăng từ 20 lên 21 (cần bổ sung thêm 01 giảng viên dự bị), thì số giảng viên của khoa 3 lại giảm từ 4 xuống 3.

Để giải quyết vấn đề phân chia này được công bằng, ta xây dựng mô hình toán học sau đây (xem [3], [4]).

## 2. Xây dựng chỉ tiêu số lượng

Xét trường hợp cần phân chia công bằng số giảng viên cho hai nhóm đối tượng A và B. Giả sử lực lượng của hai nhóm đối tượng A và B lần lượt là  $p_1$  và  $p_2$ , số giảng viên được phân chia công bằng là  $n_1$  và  $n_2$ . Khi đó, chỉ khi  $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2}$  thì việc phân chia mới được công bằng. Tuy nhiên, trong thực tế, với yêu cầu là số giảng viên phải là các số tự nhiên thì đa số các trường hợp gặp phải là trường hợp  $\frac{p_1}{n_1} \neq \frac{p_2}{n_2}$  và khi đó việc phân chia không được công bằng (xem [1], [2], [3]).

Không mất tính tổng quát, giả sử  $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$ , mức độ không công bằng có thể được xem xét từ hiệu số  $\frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2}$ . Ta dùng tiêu chuẩn tương đối để xem xét vấn đề này như sau.

Vấn kí hiệu  $p_1$  và  $p_2$  lần lượt là lực lượng cố định của hai nhóm đối tượng A và B,  $n_1$  và  $n_2$  lần lượt là số giảng viên được phân chia cho hai nhóm đối tượng A và B (trong đó,  $n_1, n_2$  có thể thay đổi).

Nếu  $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$ , ta định nghĩa:

Nguồn: Khảo sát của tác giả

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{\frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}} \quad (1) \text{ là giá trị không}$$

công bằng tương đối của A.

Nếu  $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2}$ , ta định nghĩa

$$r_B(n_1, n_2) = \frac{\frac{p_2}{n_2} - \frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}} \quad (2) \text{ là giá trị không}$$

công bằng tương đối của B.

Nguyên tắc của phương án phân chia công bằng là phải phân chia sao cho  $r_A$  và  $r_B$  càng nhỏ càng tốt.

## 3. Xác định phương án phân chia

Giả sử hai nhóm đối tượng A và B lần lượt có được  $n_1$  và  $n_2$  giảng viên. Sử dụng việc xem xét giá trị không công bằng tương đối  $r_A$  và  $r_B$  để khi tổng số giảng viên được tăng thêm 01 thì nên chia cho nhóm đối tượng A hay nhóm đối tượng B.

Không mất tính tổng quát, giả sử  $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$ , tức là đối với nhóm đối tượng A là không công bằng. Khi xem xét để phân chia 01 giảng viên tăng thêm, có 03 khả năng xảy ra như sau:

(i). Trường hợp  $\frac{p_1}{n_1+1} > \frac{p_2}{n_2}$ .

Điều này có nghĩa là nhóm đối tượng A được tăng thêm 01 giảng viên và nhóm đối tượng A vẫn là không công bằng. Như vậy, giảng viên tăng thêm này đương nhiên là được chia cho nhóm đối tượng A.

(ii). Trường hợp  $\frac{p_1}{n_1+1} < \frac{p_2}{n_2}$ .

Điều này có nghĩa là khi nhóm đối tượng A được tăng thêm 01 giảng viên thì nhóm đối tượng B là không công bằng. Dựa vào công thức

(2), ta tính được giá trị không công bằng tương đối của B là:

$$r_B(n_1 + 1, n_2) = \frac{p_2(n_1+1)}{p_1 n_2} - 1 \quad (3)$$

(iii). Trường hợp  $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2+1}$ .

Điều này có nghĩa là khi nhóm đối tượng B được tăng thêm 01 giảng viên thì nhóm đối tượng A là không công bằng. Dựa vào công thức (1), ta tính được giá trị không công bằng tương đối của A là:

$$r_A(n_1, n_2 + 1) = \frac{p_1(n_2+1)}{p_2 n_1} - 1 \quad (4)$$

Do nguyên tắc của phương án phân chia giảng viên công bằng là làm cho giá trị không công bằng tương đối càng nhỏ càng tốt, nên: Nếu  $r_B(n_1 + 1, n_2) < r_A(n_1, n_2 + 1)$  (5) thì 01 giảng viên tăng thêm này nên phân chia cho nhóm đối tượng A.

- Nếu ngược lại, tức là nếu  $r_A(n_1, n_2 + 1) < r_B(n_1 + 1, n_2)$  thì 01 giảng viên tăng thêm này nên phân chia cho nhóm đối tượng B.

Dựa vào công thức (3) và (4), ta có:

$$(5) \leftrightarrow \frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)} \quad (6)$$

Để thấy rằng trong trường hợp (i), ta có:

$$\frac{p_1}{n_1 + 1} > \frac{p_2}{n_2} \leftrightarrow \frac{p_2^2}{n_2(n_2 + 1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1 + 1)}$$

Do vậy, ta kết luận được rằng:

Nếu có bất đẳng thức (6), thì giảng viên tăng thêm sẽ được phân chia cho nhóm đối tượng A, còn nếu ngược lại, thì giảng viên tăng thêm sẽ được phân chia cho nhóm đối tượng B.

Đặt  $Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}$ ,  $i = 1, 2$ . Khi đó, giảng viên tăng thêm sẽ được phân chia cho nhóm đối tượng nào có giá trị  $Q_i$  lớn hơn.

Phương pháp này có thể được mở rộng hơn cho trường hợp xem xét phân chia 01 giảng viên tăng thêm với số nhóm đối tượng là  $m$ , với  $m > 2, m \in N$ .

Giả sử lực lượng của nhóm đối tượng thứ  $i$  là  $p_i$ , với số giảng viên đã có tương ứng là  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Khi tổng số giảng viên được tăng thêm 01, ta tính toán:

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Khi đó, 01 giảng viên tăng thêm này sẽ được phân chia cho nhóm đối tượng nào có giá trị  $Q_i$  lớn nhất.

Quay lại với bài toán ban đầu đã đưa ra. Đầu tiên, dựa vào tỉ lệ phân chia theo phần nguyên để phân chia, ta phân chia 19 giảng viên cho 03 khoa như sau:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên tương ứng	10	6	3

Với giảng viên thứ 20, ta có:

$$Q_1 = \frac{103^2}{10 \times 11} = 96.4$$

$$Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.3$$

$\Rightarrow Q_1$  lớn nhất  $\Rightarrow$  giảng viên thứ 20 được phân chia cho khoa 1. Như vậy, với 20 giảng viên, ta có kết quả phân chia như sau:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên tương ứng	11	6	3

Chú ý rằng, theo như phân chia lúc đầu:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên tương ứng	10	6	4

Tiếp theo, với giảng viên thứ 21, tương tự ta

$$Q_1 = \frac{103^2}{11 \times 12} = 80.4$$

có:  $Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5$

$$Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.3$$

$\Rightarrow Q_3$  lớn nhất  $\Rightarrow$  giảng viên thứ 21 được phân chia cho khoa 3. Như vậy, với 21 giảng viên, ta có kết quả phân chia như sau:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên tương ứng	11	6	4

Trong khi theo như phân chia ban đầu:

Khoa	Khoa 1	Khoa 2	Khoa 3
Số giảng viên tương ứng	11	7	3

#### 4. Kết luận

Mẫu chốt của phương án phân chia công bằng đó là xây dựng được chỉ tiêu số lượng so sánh công bằng, đơn giản và hợp lý. Mô hình được trình bày trong bài báo này đã đề xuất chỉ tiêu là giá trị

không công bằng tương đối  $r_A$  và  $r_B$ . Đó chính là tiền đề của việc xác định phương án phân chia theo tỷ lệ để đạt được sự công bằng khi phân chia một lượng công việc, hay phân chia quyền lợi cho một số nhóm đối tượng.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. J. N. Kapur. (1988). *Mathematical Modelling*. John Wiley & Sons.
- [2]. Mark M. Meerschaert. (2013). *Mathematical Modelling*, 4th Edition, Academic Press.
- [3]. R. Aris. (1979). *Mathematical Modelling Techniques*. San Francisco, Pitman Advanced Pub.
- [4]. Vicente Montesinos, Peter Zizler, Václav Zizler. (2015). *An Introduction to Modern Analysis*, Springer.

---

Thông tin tác giả:

**Phạm Hồng Trường**

- Đơn vị công tác: Khoa KHCB – Trường ĐH Kinh tế & QTKD

- Địa chỉ email: [phamhongtruong888@gmail.com](mailto:phamhongtruong888@gmail.com)

Ngày nhận bài: 05/05/2018

Ngày nhận bản sửa: 23/05/2018

Ngày duyệt đăng: 29/06/2018