ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**PHẠM LỆ QUYÊN**

# VỀ PHƯƠNG PHÁP LỒI LÔGARIT VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2019**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**PHẠM LỆ QUYÊN**

# VỀ PHƯƠNG PHÁP LỒI LÔGARIT VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

**Chuyên ngành: Toán Ứng Dụng**

**Mã số: 8 46 01 12**

## LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

**TS. Bùi Việt Hương**

**THÁI NGUYÊN - 2019**

# Mục lục

# MỞ ĐẦU

Bài toán đặt không chỉnh xuất hiện trong nhiều lĩnh vực ứng dụng. Bài toán này có liên quan đến địa vật lý, vật lý plasma, các bài toán về lĩnh vực điện sinh học... Trong một bài báo nổi tiếng của Hadamard, bài toán này lần đầu tiên được giới thiệu như là một ví dụ kinh điển về bài toán đặt không chỉnh. Đặc điểm nổi bật của bài toán này là một thay đổi nhỏ trong dữ kiện cũng có thể dẫn đến một sai lệch lớn về nghiệm của bài toán. Hadamard cho rằng các bài toán đặt không chỉnh không có ý nghĩa vật lí. Chính vì vậy, việc nghiên cứu các bài toán đặt không chỉnh để tìm ra các đánh giá ổn định và các phương pháp chỉnh hóa là một việc quan trọng.

Phương pháp lồi lôgarit là một trong những phương pháp dùng để ổn định hóa các bài toán đặt không chỉnh trong phương trình đạo hàm riêng. Phương pháp này được nghiên cứu bởi Pucci (1955), John (1955, 1960), Lavrentiev (1956) and Payne (1960), Đinh Nho Hào và Nguyễn Văn Đức (2009, 2010, 2011). Đây là kĩ thuật đánh giá dựa trên các bất đẳng thức bậc hai về đạo hàm để đưa ra giới hạn trên và giới hạn dưới cho một hàm lồi lôgarit, đây là một hàm của nghiệm. Các đánh giá đó được dùng để thiết lập tính duy nhất nghiệm của bài toán và ta có thể chứng minh được sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện đã cho theo một nghĩa nào đó.

Luận văn trình bày về phương pháp lồi lôgarit và một số ứng dụng của phương pháp để ổn định hóa bài toán đặt không chỉnh trong phương trình đạo hàm riêng. Cụ thể, luận văn gồm hai chương: Chương 1, tác giả trình bày về hàm lồi, một vài kiến thức cơ bản của phương trình đạo hàm riêng và phương pháp lồi lôgarit; Chương 2, tác giả trình bày hai bài toán minh họa cho phương

pháp này, đó là bài toán Cauchy cho phương trình parabolic ngược thời gian và bài toán Cauchy cho phương trình Laplace. Đây là các bài toán đặt không chỉnh và tác giả đã sử dụng phương pháp lồi lôgarit để đưa ra đánh giá ổn định cho nghiệm của các bài toán này với điều kiện được bổ sung. Phần cuối Chương 2, tác giả có trình bày thêm một bài toán có thể xem như mở rộng của bài toán Cauchy cho phương trình Laplace.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Bùi Việt Hương. Cô đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn trân thành tới Thầy Cô giáo khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình em học tập và nghiên cứu tại trường. Em xin trân thành cảm ơn TS. Mai Viết Thuận và TS. Trương Minh Tuyên đã dành sự quan tâm và có những lời động viên kịp thời để em cố gắng hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng em xin cảm ơn gia đình, bạn bè và chồng em đã luôn ở bên động viên, tạo điều kiện cho em trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

# Chương 1

# KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

## 1.1. Tập lồi. Hàm lồi

Mục này trình bày một số khái niệm, định nghĩa và kết quả cần thiết liên quan đến hàm lồi và tập lồi. Nội dung của mục được tham khảo từ [2].

### 1.1.1. Tập lồi

**Định nghĩa 1.1** Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$.

i) Đường thẳng đi qua hai điểm $a$ và $b$ là tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

ii) Đoạn thẳng đi qua hai điểm $a$ và $b$ là tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0,1]\}.$$

**Định nghĩa 1.2** Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu $C$ chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó, tức là

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], \text{ ta có } \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

**Định nghĩa 1.3** i) Ta nói $x$ là tổ hợp lồi của các điểm (vectơ) $x^1, x^2, \cdots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \text{ với } \lambda_j > 0, \forall j = 1, 2, \cdots, k \text{ và } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

ii) Ta nói $x$ là tổ hợp affine của các điểm (vectơ) $x^1, x^2, \cdots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \text{ với } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

**Mệnh đề 1.1** *Tập hợp $C$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó, tức là với mọi $k \in \mathbb{N}$, với mọi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k > 0$ sao cho $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ và với mọi $x^1, x^2, \cdots, x^k \in C$ ta có*

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \in C.$$

**Định nghĩa 1.4** Một tập $C$ được gọi là nón nếu với mọi $\lambda > 0$, với mọi $x \in C$ ta có $\lambda x \in C$.

i) Một nón được gọi là nón lồi nếu nó là tập lồi.

ii) Một nón lồi được gọi là nón nhọn nếu nó không chứa đường thẳng, khi đó ta nói 0 là đỉnh của nón. Nếu nón này là một tập lồi đa diện thì ta nói nó là nón lồi đa diện.

**Định nghĩa 1.5** Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi và $x \in C$.

i) Tập

$$N_C(x) = \{w : \langle w, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\},$$

được gọi là nón pháp tuyến (ngoài) của $C$ tại $x$.

ii) Tập

$$-N_C(x) = \{w : \langle w, y - x \rangle \geq 0, \forall y \in C\},$$

được gọi là nón pháp tuyến (trong) của $C$ tại $x$.

**Định lý 1.1 (Định lý xấp xỉ tuyến tính tập lồi)** *Mọi tập lồi, đóng, khác rỗng và không trùng với toàn bộ không gian đều là giao của tất cả các nửa không gian tựa của nó.*

**Định nghĩa 1.6** Cho hai tập $C$ và $D$ khác rỗng, ta nói siêu phẳng $a^T x = \alpha$ tách $C$ và $D$ nếu

$$a^T x \leq \alpha \leq a^T y, \forall a \in C, y \in D.$$

Ta nói siêu phẳng $a^T x = \alpha$ tách chặt $C$ và $D$ nếu

$$a^T x < \alpha < a^T y, \forall a \in C, y \in D.$$

Ta nói siêu phẳng $a^T x = \alpha$ tách mạnh $C$ và $D$ nếu

$$\sup_{x \in C} a^T x < \alpha < \inf_{y \in D} a^T y, \forall a \in C, y \in D.$$

**Định lý 1.2 (Định lý tách 1)** *Cho $C$ và $D$ là hai tập lồi, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $C \cap D = \emptyset$. Khi đó có một siêu phẳng tách $C$ và $D$.*

**Định lý 1.3 (Định lý tách 2)** *Cho $C$ và $D$ là hai tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $C \cap D = \emptyset$. Giả sử ít nhất một trong hai tập là tập compact. Khi đó, hai tập này có thể tách mạnh được bởi một siêu phẳng.*

### 1.1.2. Hàm lồi

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi và $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$. Ta kí hiệu

$$\text{dom} f = \{x \in C : f(x) < +\infty\},$$
$$\text{epi} f = \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

**Định nghĩa 1.7** Tập dom$f$ được gọi là miền hữu hiệu của $f$. Tập epi$f$ được gọi là trên đồ thị của $f$.

Bằng cách đặt $f(x) = +\infty$ nếu $x \notin C$, ta có thể coi $f$ xác định trên toàn không gian. Khi đó, ta có

$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq +\infty\},$$
$$\text{epi} f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

**Định nghĩa 1.8** Cho $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ là tập lồi và $f : C \to [-\infty, +\infty]$. Ta nói $f$ là hàm lồi trên $C$ nếu epi$f$ là tập lồi trong $\mathbb{R}^{n+1}$.

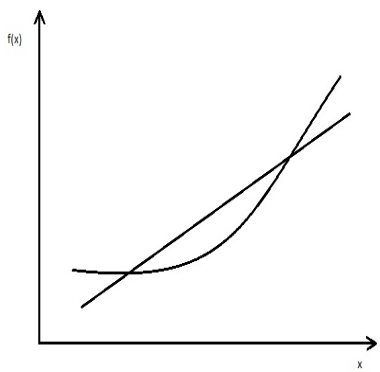
Định nghĩa trên tương đương với: $\forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0, 1)$ ta có

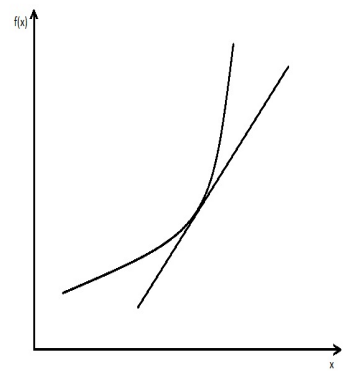
$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Nhận xét 1.1** Về mặt hình học, đường cong biểu diễn một hàm lồi phải thỏa mãn hai tính chất sau

i) không nằm trên đoạn thẳng nối bất kỳ hai điểm nào thuộc đường cong.

ii) không nằm dưới tiếp tuyến tại bất kỳ điểm nào thuộc đường cong.




Về mặt giải tích, nhận xét trên có thể biểu diễn dưới dạng bất đẳng thức sau

$$f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{1.1}$$

**Định nghĩa 1.9** Cho $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ là tập lồi.

i) Hàm $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ được gọi là lồi chặt trên $C$ nếu

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0, 1).$$

ii) Hàm $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ được gọi là lồi mạnh trên $C$ với hệ số $\eta > 0$ nếu với mọi $x, y \in C$, với mọi $\lambda \in (0, 1)$

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{1}{2}\eta\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

iii) Hàm $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ được gọi là hàm lõm trên $C$ nếu $-f$ là hàm lồi trên $C$.

**Mệnh đề 1.2** *Một hàm $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi trên $C$ khi và chỉ khi với mọi $x, y \in C$, với mọi $\alpha, \beta$ thỏa mãn $f(x) < \alpha, f(y) < \beta$, với mọi số $\lambda \in [0, 1]$ ta có*

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

**Ví dụ 1.1** Một số ví dụ về hàm lồi

i) Chuẩn Euclide $||x||$ là một hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$, trong đó $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi khác rỗng, hàm chỉ của $C$, được định nghĩa

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

là một hàm lồi.

iii) Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi khác rỗng, hàm tựa của $C$, được định nghĩa

$$S_C(x) := \sup_{y \in C} \langle y, x \rangle$$

là một hàm lồi.

iv) Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi khác rỗng, hàm khoảng cách đến tập $C$, được định nghĩa

$$d_C(x) := \min_{y \in C} \|x - y\|$$

là một hàm lồi.

**Định nghĩa 1.10** Hàm $f$ được gọi là hàm chính thường nếu dom$f \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty$ với mọi $x$.

**Định nghĩa 1.11** Hàm $f$ được gọi là hàm đóng nếu epi$f$ là tập đóng trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$.