ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—————o0o—————

HOÀNG THU THẢO

VỀ MỘT MỞ RỘNG MỚI CỦA BÀI TOÁN NAGELL-LJUNGGREN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

HOÀNG THU THẢO

VỀ MỘT MỞ RỘNG MỚI CỦA BÀI TOÁN NAGELL-LJUNGGREN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Một số kí hiệu trong luận văn **iii**

Lời cảm ơn **iv**

Mở đầu **1**

Chương 1. Phương trình Nagell-Ljunggren **3**

1.1. Giới thiệu bài toán Nagell-Ljunggren 3

1.2. Phương pháp Runge và một vài kết quả đã biết 3

1.3. Một số kết quả mới của M.A.Bennett và A.Levin về phương trình Nagell-Ljunggren 6

Chương 2. Ứng dụng giả thuyết abc để giải phương trình Nagell-Ljunggren **19**

2.1. Giả thuyết abc 19

2.2. Ứng dụng giả thuyết abc để giải phương trình Nagell-Ljunggren. 19

2.2.1. Một số khái niệm và ký hiệu cần sử dụng 19

2.2.2. Bộ ba chấp nhận được và bộ ba không chấp nhận được 21

2.2.3. Ứng dụng giả thuyết abc để giải phương trình Nagell-Ljunggren 22

Chương 3. Các lời giải của phương trình Nagell-Ljunggren suy rộng đối với các bộ ba (q,n,l) chấp nhận được **26**

3.1. Trường hợp $(q, n) = (2; 2)$ 27

3.2. Trường hợp $(n, l) = (2; 1)$ 31

3.3. Trường hợp $(q, n, l) = (2; 3; 1)$ 32

3.4. Trường hợp $(q, n, l) = (2; 3; 2)$ 33

3.5. Trường hợp $(q, n, l) = (3; 2; 2)$ 34

3.6. Trường hợp $(q, n, l) = (3; 3; 1)$ 34

3.7. Trường hợp $(q, n, l) = (3; 2; 3)$ 35

3.8. Trường hợp $(q, n, l) = (2; 4; 1)$ 36
3.9. Trường hợp $(q, n, l) = (4; 2; 2)$ 36

Kết luận **38**

Tài liệu tham khảo **39**

Một số kí hiệu trong luận văn

STT	Ký hiệu	Nội dung ký hiệu	Trang
1	$\omega\left(n\right)$	Số các ước nguyên tố khác nhau của n	4
2	$\Omega\left(n\right)$	Số lượng tất cả các ước nguyên tố của n	4
3	$G\left(n\right)$	Phần không bình phương của n	5
4	ϕ	Hàm Euler	5
5	$\mathrm{ord}_p n$	Cấp của n theo modulo p	5
6	$\gcd\left(a,b\right)$	Ước chung lớn nhất của a, b	6
7	$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$	9
8	$[x]$	$[x] = \max\left\{n \in \mathbb{Z} \left\vert n \le x\right.\right\}$ - hàm Floor	9
9	$\lceil x\rceil$	$\lceil x\rceil = \min\left\{n \in \mathbb{Z} \left\vert n \ge x\right.\right\}$ - hàm Ceiling	28
10	$\mathrm{rad}\left(n\right)$	Tích các ước nguyên tố phân biệt của n	19
11	$\omega \uparrow n$	$\omega \uparrow n = \underbrace{\omega\omega...\omega}_{n}$	20
12	$\sum_b$	$\sum_b = \{0, 1, ..., b-1\}$, $(b \ge 2)$	20
13	$\lvert\omega\rvert$	Số các kí tự của ω, độ dài của ω	20
14	$[\omega]_b$	$[\omega]_b = \sum\limits_{1 \le i \le n} a_i b^{n-i} = m$ - giá trị của ω	20
15	$(m)_b$	$(m)_b = \omega$ - biểu diễn của m trong cơ sở b	20
16	$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$	$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3} \left\vert a, b \in \mathbb{Q}\right.\right\}$	32

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Nông Quốc Chinh, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong suốt thời gian tôi học tập.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến tập thể lớp Cao học Toán K12A7 đã luôn động viên và giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân, đồng nghiệp đã giúp đỡ, động viên tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 7 năm 2020

Học viên

Hoàng Thu Thảo

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Một trong những bài toán kinh điển của Lý thuyết số là Bài toán Nagell-Ljunggren: Tìm những số nguyên $n > 2$ và $q \geq 2$ để phương trình Diophantine
$$y^q = \frac{b^n - 1}{b - 1} \tag{1}$$
có cặp nghiệm nguyên (y, b) thỏa mãn $|b|, |y| > 1$.

Vào khoảng những năm 1920 đến 1940, Nagell và Ljunggren đã công bố những kết quả đầu tiên về lời giải của phương trình Diophante (1), đó là khẳng định ngoài các lời giải : $(3, 11, 5, 2)$; $(7, 20, 4, 2)$; $(18, 7, 3, 3)$; $(-19, 7, 3, 3)$; phương trình (1) không có lời giải (b, y, n, q) nào khác nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:
(i) $q = 2$;
(ii) 3 là ước của n;
(iii) 4 là ước của n;
(iv) $q = 3$ và $n \not\equiv 5(\mathrm{mod} 6)$.

Từ đó đến nay, với tên gọi là phương trình Nagell-Ljunggren, vấn đề này đã được rất nhiều nhà toán học quan tâm và có nhiều công bố trong những năm gần đây.

- Năm 2015, Michael A.Bennett và Aaron Levin đã công bố một kết quả nghiên cứu tốt hơn rất nhiều so với kết quả của Yann Bugeaud và Preda Mihăilescu năm 2007.
- Năm 2017, Andrew Bridy, Robert J.Lemke Oliver, Arlo Shallit và Jeffrey Shallit đã công bố một kết quả mở rộng mới về vấn đề này qua bài báo "On the Generalized Nagell-Ljunggren Problem: Powers with Repetitive Representations".

Mục đích của luận văn là trình bày lại các kết quả của hai bài báo: "The Nagell–Ljunggren equation via Runge's method" của Michael A.Bennett, Aaron Levin và "On the Generalized Nagell-Ljunggren Problem: Powers with Repetitive Representations" của Andrew Bridy, Robert J.Lemke Oliver, Arlo Shallit và Jeffrey Shallit.

2. Nội dung đề tài

Luận văn được chia làm ba chương, trong đó:

Chương 1. Phương trình Nagell-Ljunggren

Chương đầu tiên trình bày về bài toán Nagell-Ljunggren và một kết quả mới của phương trình Nagell-Ljunggren khi sử dụng phương pháp cổ điển của Runge.

Chương 2. Ứng dụng giả thuyết abc để giải phương trình Nagell-Ljunggren

Chương thứ hai trình bày về giả thuyết abc, một số khái niệm, kí hiệu mới, các bộ ba chấp nhận được và quan trọng là ứng dụng của *Giả thuyết abc* vào giải phương trình Nagell-Ljunggren.

Chương 3. Các lời giải của phương trình Nagell-Ljunggren suy rộng đối với các bộ ba (q, n, l) chấp nhận được

Chương cuối cùng trình bày chi tiết lời giải của bài toán Nagell-Ljunggren suy rộng đối với 9 trường hợp mà bộ ba (q, n, l) chấp nhận được thông qua việc chứng minh các định lý.

Phần kết luận của luận văn tổng kết lại toàn bộ các kết quả đã đạt được.

Chương 1

Phương trình Nagell-Ljunggren

1.1. Giới thiệu bài toán Nagell-Ljunggren

Bài toán 1.1.1 (Bài toán Nagell-Ljunggren). *Tìm những số nguyên $n > 2$ và $q \geq 2$ để phương trình Diophantine*

$$y^q = \frac{b^n - 1}{b - 1} \tag{1.1}$$

có cặp nghiệm nguyên (y, b) thỏa mãn $|b|, |y| > 1$.

1.2. Phương pháp Runge và một vài kết quả đã biết

Vào khoảng những năm 1920 đến 1940, Nagell và Ljunggren đã công bố những kết quả đầu tiên về lời giải của phương trình Diophante (1.1), đó là khẳng định ngoài các lời giải : $(3, 11, 5, 2)$; $(7, 20, 4, 2)$; $(18, 7, 3, 3)$; $(-19, 7, 3, 3)$; phương trình (1.1) không có lời giải (b, y, n, q) nào khác nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:
(i) $q = 2$;
(ii) 3 là ước của n;
(iii) 4 là ước của n;
(iv) $q = 3$ và $n \not\equiv 5(\mathrm{mod}6)$.

Từ đó đến nay, với tên gọi là phương trình Nagell-Ljunggren, vấn đề này đã được rất nhiều nhà toán học quan tâm và có nhiều công bố trong những năm gần đây.

Năm 1887, trong một bài báo của mình, C.Runge đã mô tả một phương pháp dùng để xác định các nghiệm nguyên của các phương trình Diophantine có dạng $f(x) = g(x)$, trong đó f và g là các đa thức một ẩn x với hệ số nguyên. Sau này, nhiều nhà toán học như Bugeaud, Mihăilescu,... đã sử dụng phương pháp của Runge để chứng minh các định lý toán học, phương pháp suy luận như vậy được gọi chung là phương pháp Runge.

Năm 2007, trong bài báo "On the Nagell-Ljunggren equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$", Y.Bugeaud và P.Mihăilescu đã sử dụng phương pháp Runge chứng minh được rằng: Nếu (b, y, n, q) là một nghiệm của phương trình

$$\frac{b^n-1}{b-1} = y^q, \tag{1.2}$$

với $|b|, |y| > 1; n > 2; q \geq 2$; thì ta có

$$\omega(n) \leq \Omega(n) \leq 4,$$

trong đó $\omega(n)$ là *số các ước nguyên tố khác nhau* của n, còn $\Omega(n)$ là *số lượng tất cả các ước nguyên tố* của n.

Năm 2015, trong bài báo "The Nagell–Ljunggren equation via Runge's method", M.A.Bennett và A.Levin cũng đã sử dụng phương pháp Runge chứng minh được kết quả tốt hơn rất nhiều so với kết quả của Bugeaud và Mihăilescu. Đó là: Nếu (b, y, n, q) là một nghiệm của phương trình (1.2) thì

$$\omega(n) \leq \Omega(n) \leq 3.$$

Mục tiêu chính của chương này là trình bày lại các kết quả đã thu được của M.A.Bennett và A.Levin trong bài báo "The Nagell–Ljunggren equation via Runge's method".

Trước hết, ta sẽ nhắc lại một số kết quả đã thu được của Nagell, Ljunggren, Mihăilescu, Bugeaud,... Phương trình Nagell–Ljunggren (1.2) có đúng 4 nghiệm đã biết đó là:

$$(NL) \quad \frac{3^5-1}{3-1} = 11^2,\ \frac{7^4-1}{7-1} = 20^2,\ \frac{18^3-1}{18-1} = 7^3,\ \frac{(-19)^3-1}{(-19)-1} = 7^3.$$