ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

LÝ NGỌC CHUNG

BÀI TOÁN JOSEPHUS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

LÝ NGỌC CHUNG

BÀI TOÁN JOSEPHUS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2021

Mục lục

Bảng ký hiệu

$a!$	Giai thừa của a
$a \mid b$	a là ước của b hay b là bội của a
$a \equiv b \mod p$	a đồng dư với b modulo p
$\lceil a \rceil$	Số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng a
$\lfloor a \rfloor$	Số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a
$\{a\}$	Phần phân số của a
c_m	Số collapsing thứ m
e_m	Phép xấp xỉ của c_m
$j(n,k,i)$	Vị trí của phần tử bị xóa thứ i trong bài toán Josephus với biến n và tham số k
$J(n)$	$= j(n,2,n)$
d_m	$= j(c_m,k,c_m-l)$
$\mathrm{round}(a)$	$= a+\varepsilon$ với $-\dfrac{1}{2} < \varepsilon \le \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn $a+\varepsilon$ là số nguyên

Mở đầu

Bài toán Josephus là một bài toán được gọi theo tên của một sử gia người Do Thái Flavius Josephus, sinh sống vào thế kỉ thứ nhất sau công nguyên. Bài toán xuất phát từ sự tường trình của Josephus về một câu chuyện trong cuộc xung đột giữa người La Mã và người Do Thái năm 67 sau công nguyên. Khi người La Mã chiếm được thành phố Jotapata, Josephus cùng 40 người lính bị quân La Mã vây hãm trong một hang động. Những người lính này thà tự sát chứ không chịu đầu hàng. Josephus và một người bạn của ông không đồng tình với suy nghĩ này. Vì vậy, họ đã bày ra một trò chơi: tất cả bọn họ đứng vòng quanh thành một vòng tròn và đếm từ 1 đến 3 liên tục, ai là người thứ ba phải tự sát, liên tục làm như vậy cho đến khi chỉ còn 2 người còn sống sẽ phải tự sát cuối cùng. Bằng cách chọn các vị trí 31 và 16 trong vòng tròn, Josephus và người bạn của ông ấy đã thoát chết.

Ta sẽ mô hình hóa bài toán tổng quát hơn. Ta đánh số n vị trí xung quanh vòng tròn bởi các số $0, 1, 2, \dots, n-1$ và bắt đầu đếm từ số 0, cứ phần tử thứ k sẽ bị xóa. Ký hiệu $j(n, k, i)$ là vị trí của phần tử bị xóa thứ i. Bằng cách xác định hàm j này, ta có thể tìm ra lời giải cho bài toán Josephus. Nhiều khía cạnh của bài toán Josephus và nhiều tính chất của hàm j được tìm ra. Một số ví dụ như công thức đệ quy của $j(n, k, n)$ và một số tính chất đồng dư của số Josephus, thuật toán để tính hàm j và giải phương trình $j(n, k, i) = l$ theo i khi cho trước n và k hay công thức hiển của hàm j. Rất nhiều tính chất của hàm j được tìm ra. Dưới sự hướng dẫn của thầy TS. Ngô Văn Định, tôi chọn đề tài "Bài toán Josephus" để làm luận văn của mình.

Mục đích của đề tài là tìm hiểu và trình bày lại một số kết quả liên quan đến bài toán Josephus và mở rộng của nó. Đây là một trong những vấn đề thú vị của lý thuyết số, được nhiều người quan tâm nghiên cứu và đã có rất nhiều kết quả phong phú. Luận văn có nhiệm vụ tìm hiểu các phương pháp giải bài toán Josephus trong một số trường hợp riêng và trường hợp tổng quát. Đồng thời, luận văn trình bày một số kết quả liên quan đến bài toán Josephus.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, đề tài gồm 2 chương, cụ thể:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn trình bày một số kiến thức chuẩn bị cho phần sau, như các kiến thức về biểu diễn số tự nhiên theo cơ số b bất kì, hệ nhị phân, phép toán đồng dư, khái niệm hàm sàn, hàm trần.

Chương 2. Bài toán Josephus

Trong chương 2, luận văn trình bày về bài toán Josephus, mô hình hóa và tìm lời giải cho bài toán. Đồng thời, chúng tôi trình bày một số kết quả được công bố gần đây liên quan đến bài toán Josephus. Tài liệu tham khảo chính của chương này là các tài liệu [3] và [4].

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Kạn, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Xin cảm ơn những người thân trong gia đình và tất cả những người bạn thân yêu đã hết sức thông cảm, chia sẻ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi để tôi có thể học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn của mình.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2021

Người viết luận văn

Lý Ngọc Chung

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị cho chương sau, như các kiến thức về biểu diễn số tự nhiên theo cơ số b bất kì, hệ nhị phân, phép toán đồng dư, khái niệm hàm sàn, hàm trần trong số học.

1.1 Biểu diễn số nguyên theo cơ số b

Như ta đã biết, mọi số tự nhiên $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

trong đó $1 \leq a_k \leq 9, 0 \leq a_j \leq 9$, với $k > j \geq 0$. Biểu diễn này được gọi là *biểu diễn thập phân* hay biểu diễn *cơ số* 10 của số tự nhiên n. Mặc dù hầu hết mọi người quen thuộc với cách biểu diễn số như này, nhưng tổng quát hơn, ta có thể biểu diễn số theo cơ số b nguyên dương bất kỳ như sau.

Định lý 1.1.1 ([2]). *Giả sử b là một số nguyên lớn hơn 1. Với bất kỳ số nguyên $n \geq 1$ tồn tại duy nhất bộ số nguyên $(k, a_0, a_1, \ldots, a_k)$ sao cho $0 \leq a_i \leq b - 1$, $i = 0, 1, \ldots, k, a_k \neq 0$ và*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0. \qquad (*)$$

Chứng minh. Để chứng minh sự tồn tại của $(*)$ ta áp dụng liên tiếp thuật toán chia:

$$n = q_1 b + r_1, 0 \leq r_1 \leq b - 1,$$

$$q_1 = q_2 b + r_2, 0 \leq r_2 \leq b - 1,$$

$$\ldots\ldots$$

$$q_{k-1} = q_k b + r_k, 0 \leq r_k \leq b - 1,$$

trong đó q_k là thương khác không cuối cùng. Đặt

$$q_0 = n, a_0 = n - q_1 b, a_1 = q_1 - q_2 b, \ldots, a_{k-1} = q_{k-1} - q_k b, a_k = q_k.$$

Khi đó

$$\sum_{i=0}^{k} a_i b^i = \sum_{i=0}^{k} (q_i - q_{i+1} b) b^i = q_0 + \sum_{i=1}^{k} q_i b^i - \sum_{i=1}^{k} q_i b^i = q_0 = n.$$

Để chứng minh tính duy nhất, giả sử $n = c_0 + c_1 b + \cdots c_h b^h$ là một biểu diễn khác của n.

Nếu $h \neq k$, ví dụ $h > k$ thì $n \geq b^k \geq b^{k+1}$. Nhưng

$$\begin{aligned} n &= a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k \\ &\leq (b-1)(1 + b + \cdots + b^k) = b^{k+1} - 1 < b^{k+1}, \end{aligned}$$

ta suy ra mâu thuẫn.

Nếu $h = k$ thì

$$a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k = c_0 + c_1 b + \cdots c_k b^k,$$

nên $b \mid (a_0 - c_0)$. Mặt khác, $|a_0 - c_0| < b$, do đó $a_0 = c_0$. Do đó

$$a_1 + a_2 b + \cdots + a_k b^{k-1} = c_1 + c_2 b + \cdots c_k b^{k-1}.$$

Bằng cách lặp lại thủ tục trên, ta suy ra $a_1 = c_1, a_2 = c_2, \ldots$ và $a_k = c_k$. $\square$

Hệ thức $(*)$ được gọi là *biểu diễn cơ số b* của n và ký hiệu là

$$n = (a_k a_{k-1} \cdots a_0)_b.$$

Ta gọi $a_0, a_1, \ldots$ tương ứng là kí tự thứ nhất, thứ hai, $\ldots$của n trong cơ số b. Khi $b = 10$ thì biểu diễn cơ số 10 được gọi là biểu diễn thập phân, ta ký hiệu gọn lại thành $n = a_k a_{k-1} \cdots a_0$.

Quy tắc chuyển đổi một số từ hệ thập phân sang hệ có cơ số b ($b \neq 10$): Lấy số thập chia cho cơ số b cho đến khi phần thương của phép chia bằng 0, số đổi chính là các phần dư của phép chia theo thứ tự ngược lại.

Ví dụ 1.1.2. Viết 1211 trong cơ số 3, viết 6 trong cơ số 2.

Giải. Thực hiện liên tiếp phép chia 1211 cho 3, các phần dư thu được là các kí tự trong biểu diễn cơ số 3 theo thứ tự ngược lại. Ta thực hiện các phép chia như sau:

$$1211 = 3 \cdot 403 + \mathbf{2}$$

$$403 = 3 \cdot 134 + \mathbf{1}$$

$$134 = 3 \cdot 44 + \mathbf{2}$$

$$44 = 3 \cdot 14 + \mathbf{2}$$

$$14 = 3 \cdot 4 + \mathbf{2}$$

$$4 = 3 \cdot 1 + \mathbf{1}$$

$$1 = 3 \cdot 0 + \mathbf{1}$$

Do đó $1211 = 1122212_3$.

Thực hiện liên tiếp phép chia 6 cho 2, các phần dư thu được là các kí tự trong biểu diễn cơ số 2 theo thứ tự ngược lại.

$$6 = 2 \cdot 3 + \mathbf{0}$$

$$3 = 2 \cdot 1 + \mathbf{1}$$

$$1 = 2 \cdot 0 + \mathbf{1}.$$

Do đó $6 = 2^2 + 2^1 + 0 = 110_2$. □

Quy tắc chuyển đổi một số từ hệ cơ số b bất kỳ về hệ thập phân: Ta sử dụng công thức $(*)$.

Ví dụ 1.1.3. Chuyển các số sau sang số thập phân:

$$452_6, \quad 101101_2, \quad 107_9, \quad 101011_2.$$

Giải.

$$\begin{aligned}
452_6 &= 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 2 = 144 + 30 + 2 = 176,\\
101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 45,\\
107_9 &= 1 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9^2 + 7 = 88,\\
101011_2 &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1\\
&= 64 + 16 + 2 + 1 = 83.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.1.4. Xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho 11111_n là số chính phương.

Giải. Ta có

$$11111_n = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$$

Nếu n chẵn thì $n^2 + \dfrac{n}{2}$ và $n^2 + \dfrac{n}{2} + 1$ là hai số nguyên liên tiếp. Ta có

$$\begin{aligned}
\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)^2 &= n^4 + n^3 + \frac{n^2}{4}\\
&< n^4 + n^3 + n^2 + n + 1\\
&< \left(n^2 + \frac{n}{2} + 1\right)^2.
\end{aligned}$$

Do đó 11111_n không là số chính phương.