ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN TIẾN LONG

VỀ SỐ PADOVAN VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nông Quốc Chinh

THÁI NGUYÊN - 2021

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS. TS. Nông Quốc Chinh, Giảng viên Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Em xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của em đối với những điều thầy đã dành cho em.

Em xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K12A5 (2018 - 2020) Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho em hoàn thành khóa học.

Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu Trường trung học phổ thông Bắc Kạn, tỉnh Bắc Kạn đã tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè và đồng nghiệp, những người đã động viên, hỗ trợ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 12 năm 2020

Tác giả luận văn

Nguyễn Tiến Long

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\forall x$	với mọi x
$\mathbb{Z}$	tập các số nguyên
$\mathbb{Z}^+$	tập các số nguyên dương
$\mathbb{Q}$	tập các số hữu tỷ
$\{P_n\}_{n\geq 0}$	dãy số Padovan
$[x]$	phần nguyên của số thực x
$\lceil x \rceil$	số nguyên bé nhất không nhỏ hơn số thực x được gọi là trần của x
$\lfloor x \rfloor$	số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực x được gọi là sàn của x
(x)	số nguyên gần một số thực x nhất hay số làm tròn của x
$\square$	kết thúc chứng minh của định lí hoặc bổ đề

Mở đầu

Trong Toán học, dãy số nguyên thường xuyên xuất hiện và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành khoa học khác nhau. Một ví dụ nổi tiếng là dãy số Fibonacci, dãy này đã được biết đến cách đây hàng nghìn năm và được ứng dụng rộng rãi trong Toán học, Sinh học, Kinh tế, Khoa học Máy tính, Vật lý, Kiến trúc, hội họa. . . .Ta đã biết dãy số Fibonacci $\{F_n\}_{n\geq 0}$ được xác định bởi quan hệ truy hồi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

với điều kiện ban đầu là:

$$F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Dãy số Padovan xuất hiện muộn hơn rất nhiều, và nó được gọi theo tên nhà toán học Richard Padovan vào năm 1994. Tương tự dãy Fibonacci, dãy Padovan $\{P_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy số nguyên cũng được xác định bởi quan hệ truy hồi:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

với điều kiện ban đầu:

$$P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 0.$$

Một vài số hạng ban đầu của dãy Padovan là:

$$1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, \ldots$$

Mặt khác cũng có thể bắt đầu dãy số Padovan với điều kiện ban đầu khác:

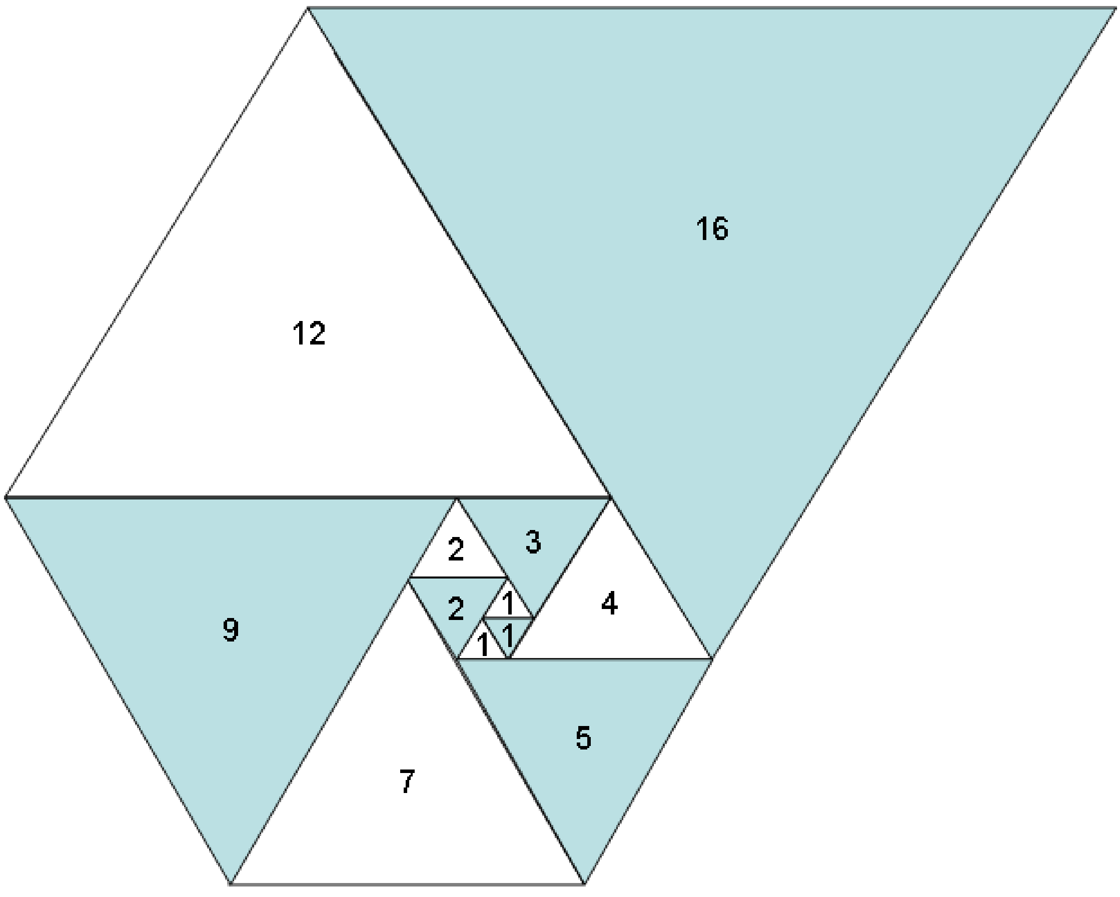
$$P_0 = P_1 = P_2 = 1$$

khi đó ta có dãy:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, \ldots$$

Dãy số này chính là dãy số ở trên bỏ đi 5 số đầu tiên.

Dãy số Padovan được ứng dụng trong Toán học, Sinh học, Kinh tế, Khoa học Máy tính, Vật lý, Kiến trúc, hội họa. Một ví dụ khá thú vị, hình xoắn ốc của các hình tam giác đều có độ dài cạnh theo trình tự Padovan.



Mục tiêu của luận văn là nghiên cứu dãy số Padovan và một vài ứng dụng. Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, luận văn gồm ba chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này giới thiệu khái niệm và một số tính chất cơ bản về phần nguyên được trình bày với mục đích cung cấp các kiến thức cần thiết để người đọc dễ theo dõi các kiến thức ở phần sau.

Chương 2: Dãy số Padovan, một số tính chất của dãy số Padovan. Trong chương này giới thiệu tính chất cơ bản về dãy số Padovan, công thức hàm sinh và công thức Binet của dãy số Padovan.

Chương 3: Biểu diễn các số Padovan dưới dạng tổng của các hệ số đa thức trên các phân hoạch của một số nguyên n thành những phần lẻ. Trong chương này nghiên cứu tính chất biểu diễn các số Padovan như tổng của các hệ số đa thức trên các phân hoạch của các số nguyên n thành những phần lẻ.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này giới thiệu các kiến thức cơ bản về số nguyên, phần nguyên, hàm trần, hàm sàn, phần dư của số thực. Sau đó, một số tính chất về phần nguyên được trình bày với mục đích cung cấp các kiến thức cần thiết để người đọc dễ theo dõi các kiến thức ở phần sau. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu trong tài liệu [1].

1.1 Khái niệm về phần nguyên

Định nghĩa 1.1.1. Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên lớn nhất không lớn hơn x được gọi là phần nguyên. Ta thường kí hiệu phần nguyên của x là $[x]$ hoặc $\lfloor x \rfloor$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên bé nhất không nhỏ hơn x được gọi là trần của x và kí hiệu là $\lceil x \rceil$

Định nghĩa 1.1.1 và Định nghĩa 1.1.2 tương đương với:

$$[x] = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq x < z + 1 \\ z \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - z < 1 \\ z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

và

$$\lceil x \rceil = z \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 < x \le z \\ z \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le z - x < 1 \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hơn nữa, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ nếu $x \in \mathbb{Z}$ và $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ với mọi $x \notin \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.1.3. Phần dư (phần thập phân, phần lẻ) của một số thực x, kí hiệu là $\{x\}$ được định nghĩa bởi công thức $\{x\} = x - [x]$.

Từ Định nghĩa 1.1.3 ta suy ra ngay, $0 \le \{x\} < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\{z\} = 0$ khi và chỉ khi z là số nguyên. Ta biết rằng, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại số nguyên $z \in \mathbb{Z}$ sao cho $z \le x < z + 1$.

Định nghĩa 1.1.4. Số nguyên gần một số thực x nhất được kí hiệu là (x) và (x) được gọi là số làm tròn của x.

1.2 Một số tính chất về phần nguyên

Tính chất 1.2.1. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

a) $[x] \le x < [x] + 1$ hay $x - 1 < [x] \le x$;

b) $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$ hay $x \le \lceil x \rceil < x + 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x là số nguyên.

Tính chất 1.2.2.

$$x = [x] + \{x\}\,;\ 0 \le \{x\} < 1;\ x = \{x\} \Leftrightarrow 0 \le x < 1.$$

Tính chất 1.2.3.

$$[x + z] = [x] + z;\ \ \{x + z\} = \{x\}\ \text{ với mọi } z \in \mathbb{Z}.$$

Đảo lại, $\{x\} = \{y\}$ thì $y = x + z$ với $z \in \mathbb{Z}$ nào đó.

Tính chất 1.2.4. Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $[x] = x$ và $\{x\} = 0$. Ngược lại nếu $[x] = x$ hoặc $\{x\} = 0$ thì $x \in \mathbb{Z}$. Nếu $x \in \mathbb{Q}$ là số hữu tỉ nhưng không phải là số nguyên thì $\{x\}$ cũng là một số hữu tỉ thuộc khoảng $(0; 1)$. Nếu $x \in \mathbb{R}$ là số vô tỉ thì $\{x\}$ cũng là một số vô tỉ thuộc khoảng $(0; 1)$.

Tính chất 1.2.5. Phần dư, sàn và trần có tính chất luỹ đẳng, tức là khi hai lần áp dụng phép toán thì kết quả không đổi:

$$\{\{x\}\} = \{x\}\,;\ [[x]] = [x]\,,\ \text{và}\ \lceil\lceil x\rceil\rceil = \lceil x\rceil\ \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa,

$$\{[x]\} = [\{x\}] = \{\lceil x\rceil\} = 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Nhưng

$$\lceil\{x\}\rceil = 0 \text{ và } \lceil[x]\rceil = [\lceil x\rceil] = x \text{ với mọi } x \in \mathbb{Z};$$
$$\lceil\{x\}\rceil = 1, \lceil[x]\rceil = [x] = \lceil x\rceil - 1 = [\lceil x\rceil] - 1 \text{ với mọi } x \notin \mathbb{Z}.$$

Tính chất 1.2.6. Các qui tắc đổi chỗ (hoán vị), kết hợp của phép toán cộng và phép toán nhân, qui tắc kết hợp giữa phép toán nhân và phép toán cộng vẫn đúng cho phần nguyên và phần dư.

Tính chất 1.2.7. Phép làm tròn số (x) thông thường như đã nêu trong Định nghĩa 1.1.4 chính là phép lấy phần nguyên của $x + 0,5$, tức là $(x) = [x + 0,5]$.

Tính chất 1.2.8. Nếu $[x] = [y]$ thì $|x - y| < 1$ hay $-1 < x - y < 1$.

Tính chất 1.2.9. Nếu $x \geq y$ thì $[x] \geq [y]$. Đảo lại, nếu $[x] > [y]$ thì $x > y$.

Tính chất 1.2.10.

a) Cả hai số x và y là hai số nguyên khi và chỉ khi $\{x\} + \{y\} = 0$.