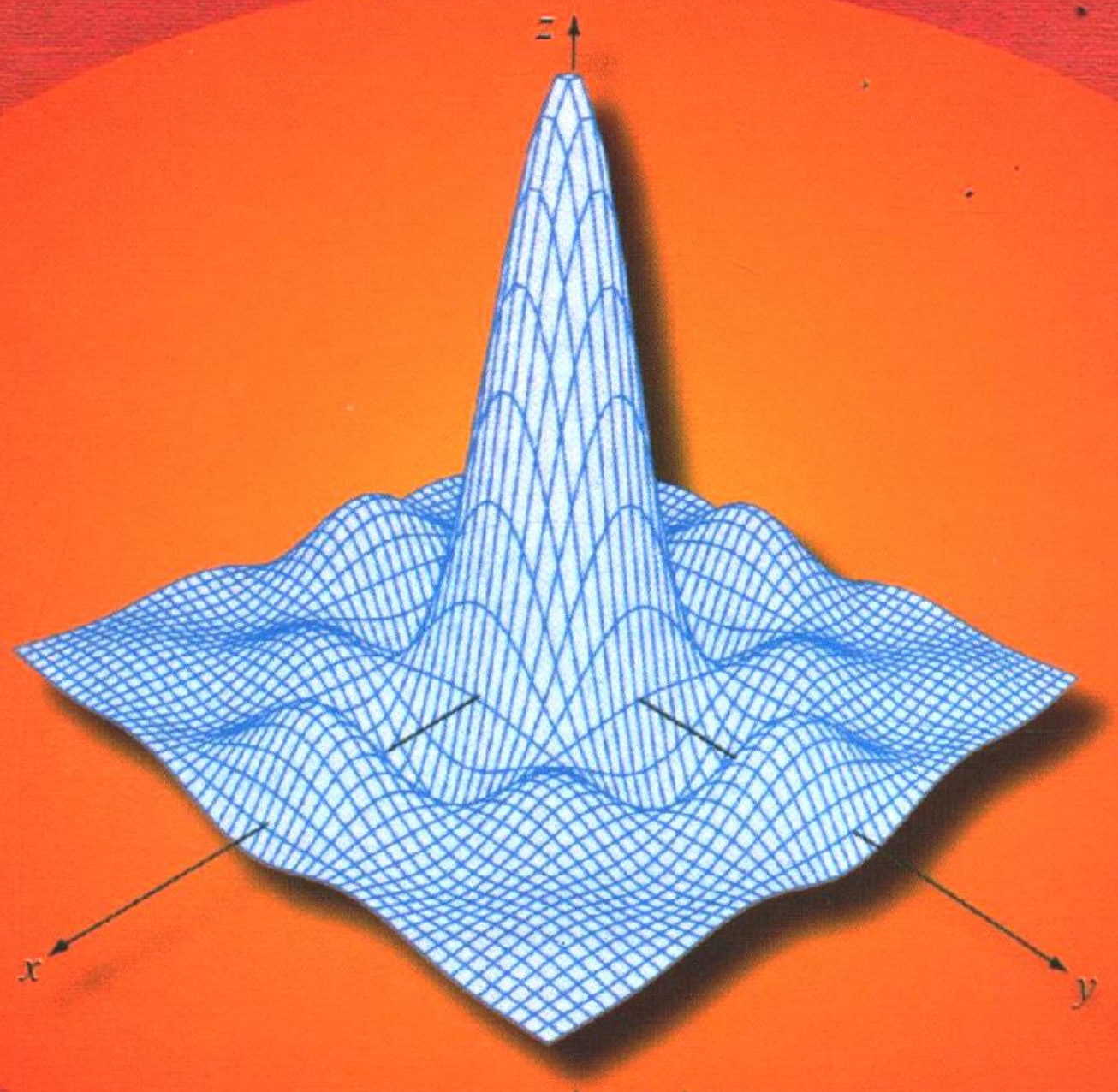
GS.TS. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
NG - PGS.TS. TRẦN XUÂN HIỂN - PGS.TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HAI

Giải tích



$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

GS.TS NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
PGS.TS TRẦN VIỆT DŨNG - PGS.TS TRẦN XUÂN HIỂN - PGS.TS NGUYỄN XUÂN THẢO

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HAI

Giải tích

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Tổ chức và chịu trách nhiệm bản thảo:
Phó tổng biên tập NGUYỄN HIỀN TRANG
Giám đốc Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội
PHẠM THỊ HỒNG

Biên tập lần đầu và tái bản:
HOÀNG VIỆT
Trình bày bìa :
LƯU CHÍ ĐỒNG
Sửa bản in :
HOÀNG VIỆT
Chế bản :
PHÙNG MINH TRỤ - HỒNG NHUNG

TOÁN HỌC CAO CẤP - TẬP HAI: GIẢI TÍCH

Mã số: 7B695h9
In 2.000 bản (QĐ in số : 49), khổ 17 x 24 cm.
Đơn vị in : In tại Công ti CP Văn hóa Hà Nội.
240 Minh Khai, Quận Hai Bà Trưng, TP Hà Nội.
Cơ sở in : Khu công nghiệp Đình Bảng - Từ Sơn, Bắc Ninh.
Số ĐKXB : 2954-2019/CXBIPH/6-1008/GD.
Số QĐXB : 4110/QĐ-GD-HN ngày 07 tháng 08 năm 2019.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 08 năm 2019.
Mã số ISBN : Tập 1 : 978-604-0-19200-4
Tập 2 : 978-604-0-19201-1
Tập 3 : 978-604-0-05573-6

LỜI NÓI ĐẦU

Toán học cao cấp là một môn khoa học cơ bản mà sinh viên các trường kĩ thuật và công nghệ phải học trong hai hay ba học kì đầu, bao gồm những vấn đề cơ bản của Đại số và Giải tích toán học, có vai trò then chốt trong việc rèn tư duy khoa học và cung cấp những công cụ toán học để sinh viên học các môn học khác, xây dựng tiềm lực khoa học để tiếp tục tự học sau khi tốt nghiệp, góp phần đào tạo những công dân trong tương lai có khả năng vận dụng tư duy khoa học trong mọi tình huống để hoàn thành nhiệm vụ công dân của mình.

Toán học cao cấp là một môn khó, đòi hỏi người học cần hiểu kĩ lí thuyết để vận dụng được thành thạo các ý tưởng, phương pháp và kết quả cơ bản của lí thuyết trong khi làm bài tập hay giải quyết vấn đề, qua đó hiểu được lí thuyết một cách sâu sắc hơn. Các khái niệm cơ bản của Đại số và Giải tích được trình bày một cách chính xác với nhiều ví dụ minh hoạ và ứng dụng. Phần lớn các định lí được chứng minh đầy đủ.

Bộ giáo trình Toán học cao cấp biên soạn trước đây đã được chỉnh lí và bổ sung nhiều lần nhằm nâng cao chất lượng trong từng thời kì. Bộ sách xuất bản lần này nhằm nhấn mạnh mối liên hệ giữa các khái niệm toán học với các bài toán đặt ra trong công nghệ và kĩ thuật. Vì vậy phần lí thuyết được giảm chút ít và tăng các ví dụ và ứng dụng trong thực tiễn. Chương Phương trình vi phân được bổ sung bởi chương Giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng bằng phương pháp biến đổi Laplace, một phương pháp thường được dùng trong các bài toán trong kĩ thuật.

Bộ Giáo trình gồm ba tập:

Tập một: Đại số và Hình học giải tích

Tập hai: Giải tích

Tập ba: Chuỗi và Phương trình vi phân.

Biên soạn bộ sách này, chúng tôi đã tham khảo các tác giả đã tham gia biên soạn bộ giáo trình trong những lần xuất bản trước và tham khảo kinh nghiệm của những đồng nghiệp đã giảng dạy môn Toán học cao cấp của những trường đại học kĩ thuật.

Chúng tôi chân thành cảm ơn tất cả các đồng nghiệp trên cũng như các nhà khoa học đã đọc bản thảo của bộ sách này và cho chúng tôi những ý kiến quý báu.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội về việc xuất bản bộ giáo trình này. Cảm ơn Ban Toán đã đề xuất việc viết lại bộ giáo trình này và cảm ơn biên tập viên Hoàng Việt đã làm việc nghiêm túc và khẩn trương.

Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến nhận xét của bạn đọc đối với bộ giáo trình này.

Nội dung của tập hai - Giải tích, được biên soạn thành mười ba chương: Bẩy chương đầu trình bày phép tính giải tích của hàm một biến, các chương còn lại trình bày phép tính giải tích của hàm nhiều biến. Một số khái niệm của các chương 1, 2, 3, 4 đã được giảng dạy ở trường trung học. Trong giáo trình này các khái niệm được nhắc lại, hệ thống hoá và nâng cao.

Chương I: Trình bày khái niệm ánh xạ, số thực và dãy số thực.

Chương II: Trình bày hàm một biến, hàm hợp, hàm ngược và các hàm sơ cấp.

Chương III: Trình bày giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm và hàm liên tục. Nội dung của chương này là cơ sở để hiểu được các chương sau.

Chương IV: Trình bày các khái niệm cơ bản về đạo hàm và vi phân, đạo hàm của hàm hợp, đạo hàm của hàm ngược, đạo hàm và vi phân cấp cao.

Chương V: Giới thiệu các định lí cơ bản về hàm khả vi và ứng dụng. Các định lí đó cho ta thấy dáng điệu của hàm ở lân cận một điểm, cho phép ta khảo sát sự biến thiên của hàm, vẽ đồ thị của nó, vẽ đường cong biểu diễn hàm cho bởi phương trình tham số hay phương trình trong toạ độ cực.

Chương VI: Trình bày hai phương pháp cơ bản để tính tích phân không xác định, cách tính tích phân của các phân thức hữu tỉ và của một số loại hàm mà bằng phép đổi biến có thể đưa về tích phân của các phân thức hữu tỉ.

Chương VII: Giới thiệu mối quan hệ giữa tích phân xác định và tích phân không xác định, các phương pháp cơ bản để tính tích phân xác định, tích phân sâu rộng và ứng dụng của tích phân xác định.

Chương VIII: Trình bày những vấn đề cơ bản của hàm nhiều biến như giới hạn và liên tục của hàm nhiều biến, đạo hàm riêng và vi phân toàn phần, đạo hàm của hàm ẩn, đạo hàm riêng và vi phân cấp cao, công thức Taylor, cực trị và cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến.

Chương IX: Giới thiệu các ứng dụng của phép tính vi phân của hàm nhiều biến trong hình học phẳng và hình học không gian.

Chương X: Trình bày định nghĩa và cách tính tích phân kép trong toạ độ Descartes và công thức đổi biến trong tích phân kép, định nghĩa và cách tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Descartes, trong hệ toạ độ trụ và trong hệ toạ độ cầu, các ứng dụng của tích phân kép và tích phân bội ba trong hình học và cơ học.

Chương XI: Giới thiệu tích phân phụ thuộc tham số, tính liên tục, khả vi và khả tích, tích phân suy rộng phụ thuộc tham số và cách tính tích phân Euler.

Chương XII: Trình bày định nghĩa cách tính tích phân đường, công thức Green và hệ quả, định nghĩa và cách tính tích phân mặt, các công thức Stokes và Oxtrogradsky.

Chương XIII: Giới thiệu một số vấn đề về trường vô hướng và trường vectơ.

Các tác giả

CHƯƠNG I. SỐ THỰC

Chúng ta nhắc lại các khái niệm về tập hợp đã biết ở trường phổ thông trung học.

§1.1. TẬP HỢP

Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học không được định nghĩa. Chúng ta đã biết:

- Tập hợp các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.
- Tập hợp các số nguyên dương: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.
- Tập hợp các số nguyên: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- Tập hợp các số nguyên dương: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, ...\}$ $\left(\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$.
- Tập hợp các số hữu tỉ: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$.
- Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ gồm các số hữu tỉ hay vô tỉ, nghĩa là gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn hay không tuần hoàn.
- Tập hợp các số thực khác 0: $\mathbb{R}^* = \{ x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \}$.
- Tập hợp các số thực không âm: $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} | x \geq 0 \}$.
- Tập hợp các số thực không dương: $\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \}$.
- Tập hợp các số thực dương: $\mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R} | x > 0 \}$.
- Tập hợp các số thực âm: $\mathbb{R}_-^* = \{ x \in \mathbb{R} | x < 0 \}$.

Cho hai tập hợp A và B:

Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì A là tập con của B; kí hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

- Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc tập B; kí hiệu là $A \cup B = \{ x | x \in A \text{ hoặc } x \in B \}$.
- Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B; kí hiệu là $A \cap B = \{ x | x \in A \text{ và } x \in B \}$.
- Hiệu hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập B, kí hiệu là $A \setminus B = \{ x | x \in A, x \notin B \}$.

Nếu A là tập con của E thì tập hợp bù của A trong E là tập hợp $E \setminus A$, kí hiệu là $\overline{A} = C_E A$; $\overline{A} = E \setminus A$. Như vậy $\overline{A} \subset E$; $E \setminus \overline{A} = \overline{\overline{A}} = A$.

Với các tập hợp đã liệt kê ở trên, ta có $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tích Descartes của hai tập hợp A và B là tập hợp các cặp (a, b), $a \in A$, $b \in B$ theo thứ tự a trước, b sau; kí hiệu là $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Nếu $A = B$ thì $A \times B = A^2$.

Nếu $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ thì $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A^n$.

Ví dụ ta lấy $\mathbb{R}^2$ gồm các cặp (a, b) với $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ là tập hợp các điểm trên mặt phẳng.

Ta nhắc lại về mệnh đề và kí hiệu lôgic.

§1.2. MỆNH ĐỀ

Mệnh đề là một khẳng định chỉ có thể đúng (Đ) hoặc sai (S), không thể vừa đúng vừa sai, vừa không đúng, vừa không sai.

Ví dụ 1. Mệnh đề "$4 < 6$" là mệnh đề đúng.

Mệnh đề "2 là số nguyên tố" là mệnh đề đúng.

Mệnh đề "2 là số chính phương" là mệnh đề sai.

Phủ định của một mệnh đề

Phủ định của một mệnh đề A là mệnh đề kí hiệu $\overline{A}$, chỉ rằng:

$\overline{A}$ (Đ) nếu A (S); $\overline{A}$ (S) nếu A (Đ)

Mệnh đề kéo theo

Mệnh đề kéo theo, kí hiệu là $A \Rightarrow B$, đọc là "từ mệnh đề A suy ra (kéo theo) mệnh đề B" là mệnh đề (S) khi A (Đ) và B (S).

Nếu $A \Rightarrow B$ đúng thì A là điều kiện đủ của B, còn B là điều kiện cần của A.

Mệnh đề tương đương

Mệnh đề tương đương, kí hiệu là $A \Leftrightarrow B$, là mệnh đề (Đ) nếu A, B cùng đúng hay cùng sai. Điều đó có nghĩa là $A \Rightarrow B$ đồng thời $B \Rightarrow A$.

Nếu $A \Leftrightarrow B$ thì A là điều kiện cần và đủ của B và ngược lại B là điều kiện cần và đủ của A. Người ta còn nói: có A khi và chỉ khi (nếu và chỉ nếu) có B và ngược lại.

Ví dụ 2. Điều kiện cần và đủ để tứ giác là hình bình hành là hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mệnh đề chứa biến

Mệnh đề chứa biến x, kí hiệu là $p(x)$ là mệnh đề mà tính đúng hay sai phụ thuộc vào từng giá trị của biến x. Nói cách khác, ứng với mỗi x ta có một mệnh đề $p(x)$.

Chẳng hạn, $x+2=3$ là mệnh đề chứa biến x, mệnh đề này đúng khi $x=1$ và sai khi $x \neq 1$.

Mệnh đề tồn tại: $\exists x \in X : p(x)$ nghĩa là có một x thuộc X có tính $p(x)$.

Mệnh đề khái quát: $\forall x \in X : p(x)$ nghĩa là mọi x thuộc X đều có tính $p(x)$.

Ta có khẳng định:

Mệnh đề A : "$\forall x \in X : p(x)$" $\Rightarrow \overline{A}$: "$\exists x \in X : \overline{p(x)}$"

Mệnh đề A : "$\exists x \in X : p(x)$" $\Rightarrow \overline{A}$: "$\forall x \in X : \overline{p(x)}$".

Phương pháp chứng minh phản chứng

Để chứng minh mệnh đề P đúng ta giả sử P sai, từ đó bằng lập luận toán học ta suy ra mâu thuẫn; nghĩa là $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Ví dụ 3. Chứng minh: Nếu n^2 là số chẵn thì n cũng là số chẵn với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$ là số lẻ, ta có $\exists k \in \mathbb{N}$ để $x = 2k+1$ từ đó $n^2 = (2k+1)^2$ $= 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1)+1$ là một số lẻ. Điều này trái với giả thiết n^2 là một số chẵn, vậy n chẵn.

Phương pháp chứng minh quy nạp

Để chứng minh mệnh đề P phụ thuộc $n \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, ta chỉ ra P đúng với n_0, sau đó chứng minh nếu P đúng với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ thì P đúng với $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 4. Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$.

Cho $n=1$ ta có $2^1 > 1$ đúng; giả sử $2^n > n$ đúng với $n \geq 1$, thì

$$2^{n+1} = 2^n.2 = 2^n + 2^n > n+1.$$

Vậy $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5. (*Bất đẳng thức Bernoulli*) Chứng minh $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Với $n=1$ ta có khẳng định là đúng.

Giả sử, khi $n = k \in \mathbb{N}^*$ khẳng định là đúng: $(1+x)^k \geq 1+kx$.

Khi đó với $n = k+1$, ta có

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \geq 1+(k+1)x$$

nghĩa là khẳng định đúng với $k+1$.

Vậy khẳng định được chứng minh.

§1.3. ÁNH XẠ

1.3.1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp $X, Y \neq \varnothing$, ta gọi ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$, kí hiệu là

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y \text{ hay } x \mapsto y = f(x)$$

Ta nói f là ánh xạ, là hàm xác định trong X và lấy giá trị trong Y. Tập X là tập nguồn (tập tạo ảnh); còn tập Y là tập đích (hay tập ảnh). Tập hợp các ảnh của $\forall x \in X$ gọi là ảnh của X, kí hiệu là $f(X)$.

Ví dụ. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$, $A = [-3, 1]$ là một ánh xạ vì với mỗi $x \in A$ ta có một và chỉ một $y = f(x)$. Khi đó $f(A) = [0, 2]$ vì $0 \leq \sqrt{4 - (x+1)^2} \leq 2$.

1.3.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là *đơn ánh*, nếu $\forall x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, điều đó tương đương với: $\forall x_1, x_2 \in X$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, nghĩa là mỗi $y \in Y$ là ảnh của nhiều nhất một $x \in X$.

Ta còn gọi f là ánh xạ 1-1 (đọc là một - một) từ X vào Y.

Ánh xạ f gọi là *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$, nghĩa là $\forall y \in Y$, tồn tại ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$, khi đó ta nói rằng ánh xạ $f : X \to Y$ là ánh xạ từ X lên Y.

Ánh xạ f là *song ánh* nếu nó vừa đơn ánh, vừa toàn ánh.

Ví dụ

a) Ánh xạ từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $y = e^x$ là đơn ánh, không phải là toàn ánh; nhưng xét $y = e^x$ từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ là toàn ánh nên nếu xét từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ thì ánh xạ đó là song ánh.

b) Ánh xạ từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $y = \sin x$ không đơn ánh, không toàn ánh; nếu xét từ $\mathbb{R}$ vào $[-1, 1]$ thì $y = \sin x$ không là đơn ánh nhưng là toàn ánh; nếu xét ánh xạ này từ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vào $[-1, 1]$ thì nó lại là song ánh.

c) Xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + y, x - y)$

Khi $f(x_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = f(x_2, y_2) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$