ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ DƯƠNG

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ DƯƠNG

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Đỗ Văn Lưu

THÁI NGUYÊN - 2021

Mục lục

Mở đầu

Bài toán cân bằng vectơ là một mô hình hợp nhất của một số bài toán chẳng hạn bài toán tối ưu vectơ, bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ, bài toán bù vectơ, bài toán điểm yên ngựa vectơ. Một trong những đề tài quan trọng của bài toán cân bằng vectơ là khảo sát các tính chất của tập nghiệm của bài toán đó. Tính liên thông của tập nghiệm cho ta biết khả năng di chuyển liên tục từ nghiệm này đến nghiệm khác. Y. Xu và P. Zhang ([3], 2018) đã nhận được các kết quả về tính liên thông đường của tập nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh và áp dụng cho bài toán tối ưu vectơ.

1.2. Mục đích của đề tài luận văn

Luận văn trình bày các kết quả về tính liên thông và tính liên thông đường của tập nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh và áp dụng cho bài toán tối ưu vectơ, đăng trong tạp chí *Journal of Optimization Theory and Applications*, **178** (2018).

2. Nội dung của đề tài luận văn và những vấn đề cần giải quyết

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.
Chương 1 với tiêu đề "Một số kiến thức chuẩn bị", trình bày một số kiến thức về giải tích hàm và giải tích lồi; các định lý tách tập lồi và định lý

tách các tập không lồi.
Chương 2 với tiêu đề "Tính liên thông của tập nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh và áp dụng", trình bày các kết quả về tính liên thông và tính liên thông đường của tập nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh và áp dụng cho bài toán tối ưu vectơ tuyến tính.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Đỗ Văn Lưu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thiện luận văn.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán, khoa Toán - Tin và các phòng chức năng của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong thời gian học tập và trong quá trình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 01 năm 2021

Tác giả luận văn

Phan Thị Dương

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 1 trình bày một số kiến thức về giải tích hàm về ánh xạ đa trị nửa liên tục, các tập liên thông, liên thông đường; giải tích lồi về ánh xạ đơn điệu; các định lý tách tập lồi và định lý tách các tập không lồi. Các kiến thức trình bày trong Chương 1 được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3].

1.1. Một số kiến thức về giải tích hàm và hàm lồi suy rộng

Trong phần này ta sẽ nhắc lại một số kí hiệu và định nghĩa sẽ được sử dụng sau này. Giả sử X là một không gian vectơ định chuẩn. $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclid n-chiều. Bao đóng, phần bù, phần trong tôpô, biên và bao lồi của tập $A \subseteq \mathbb{R}^n$ được kí hiệu tương ứng là cl A, A^c, int A và bd A, conv A. Kí hiệu $\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Giả sử $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$; $y_{(1^-)} := (y_2, \ldots, y_n)^T$, $y_{(i^-)} := (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)^T, i = 2, \ldots, n-1$, $y_{(n^-)} := (y_1, \ldots, y_{n-1})^T$, trong đó kí hiệu T chỉ phép chuyển vị. Ký hiệu $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|$, $\|y\|_2 = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$ và $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$ tương ứng là các l_1, l_2 (Euclid) và l_∞ là chuẩn của các vectơ y. Kí hiệu $B(x, \delta)$ là hình cầu mở tâm $x \in \mathbb{R}^n$ và bán kính $\delta > 0$. Với hàm giá trị thực $\varphi : X \to \mathbb{R}$, ta đặt

$$lev_{>0}\varphi := \{x \in X : \varphi(x) > 0\},$$

được gọi là tập mức dương của hàm φ.

Giả sử Ω là tập con mở của X và $F : X \times X \to \mathbb{R}^n$. Xét bài toán cân bằng vectơ mạnh sau đây:

$$\text{(SVEP) Tìm } x \in \Omega \text{ sao cho } F(x,y) \notin -\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \quad \forall y \in \Omega. \tag{1.1}$$

Kí hiệu tập nghiệm của SVEP là $\mathrm{SOL}(F,\Omega)$.

Định nghĩa 1.1

Giả sử Λ là không gian định chuẩn. Ánh xạ đa trị $G : \Lambda \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ được gọi là

(i) Nửa liên tục dưới (l.s.c) tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu với mọi tập mở $V \subseteq \mathbb{R}^m$ với $G(\bar{\lambda}) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\lambda \in B(\bar{\lambda}, \delta)$, $G(\lambda) \cap V \neq \emptyset$.

(ii) Nửa liên tục trên (u.s.c) tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu với mọi tập mở $V \subseteq \mathbb{R}^m$ với $G(\bar{\lambda}) \subseteq V$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\lambda \in B(\bar{\lambda}, \delta)$, $G(\lambda) \subseteq V$.

Ta nói G là nửa liên tục dưới (t. ư., nửa liên tục trên) trên Λ, nếu nó là nửa liên tục dưới (t. ư., nửa liên tục trên) tại mỗi $\lambda \in \Lambda$. G được gọi là liên tục trên Λ nếu nó là nửa liên tục dưới và nửa liên tục trên trên Λ.

Sau đây ta định nghĩa tính đơn điệu.

Định nghĩa 1.2 ([3])

Giả sử K là một nón lồi trong không gian định chuẩn Y và $g : A \subseteq Y \to \mathbb{R}$ là hàm trên A.

(a) Hàm g được gọi là K-đơn điệu trên A nếu với mọi $y_1, y_2 \in A$, ta có

$$y_1 - y_2 \in K \Rightarrow g(y_1) \geq g(y_2).$$

(b) Hàm g được gọi là K-đơn điệu mạnh trên A nếu với mọi $y_1, y_2 \in A$, ta có

$$y_1 - y_2 \in K \setminus \{0_Y\} \Rightarrow g(y_1) > g(y_2).$$

(c) Hàm g được gọi là K-đơn điệu chặt trên A nếu với mọi $y_1, y_2 \in A$, ta có

$$y_1 - y_2 \in \mathrm{int}K \Rightarrow g(y_1) > g(y_2).$$

Định nghĩa 1.3

Giả sử K là một nón lồi trong $\mathbb{R}^n$ và A là một tập con của không gian định chuẩn Y. Giả sử $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$.

(i) φ được gọi là tựa K-hàm chính thường trên A nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $\lambda \in (0, 1)$, ta có

hoặc $\varphi(x_1) \in \varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K$ hoặc $\varphi(x_2) \in \varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K$.

(ii) φ được gọi là tựa K-hàm chính thường mạnh trên A nếu với bất kì $x_1, x_2 \in A$ và $\lambda \in (0, 1)$ ta có

hoặc $\varphi(x_1) \in \varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K \setminus \{0_Y\}$ hoặc
$\varphi(x_2) \in \varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K \setminus \{0_Y\}$.

Khi $K \subseteq \mathbb{R}^n_+$ thì tựa K-hàm chính thường (tựa chính thường mạnh) được gọi là tựa K-lồi chính thường (tựa chính thường mạnh); khi $K \subseteq -\mathbb{R}^n_+$ thì tựa K- hàm chính thường (hoặc tựa chính thường mạnh) được gọi là tựa K-lõm chính thường (tựa chính thường mạnh).

Nhận xét 1.1

Rõ ràng là nếu φ là tựa K-hàm chính thường mạnh thì φ là tựa K-hàm chính thường.

Nhận xét 1.2

Trong [5], Warburton đã cho định nghĩa tựa lõm mạnh (tựa lồi mạnh) của hàm giá trị thực $g : A \to \mathbb{R}$, nghĩa là g được gọi là tựa lõm mạnh (tựa lồi mạnh) trên A nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và với mọi $\lambda \in (0, 1)$, ta có

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > (<) \min\{g(x_1), g(x_2)\}.$$

Giả sử $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Ta cho hai ví dụ sau đây để chỉ ra hai sự kiện sau:

(1) φ là tựa K-lõm chính thường mạnh trên A không kéo theo φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ là tựa lõm chính thường trên A.

(2) φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ là tựa lõm mạnh trên A không kéo theo φ là tựa K-lõm chính thường mạnh trên A.

Quan hệ giữa K-lồi mạnh của φ và tựa lồi mạnh của φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ có thể chỉ ra tương tự.

Ví dụ 1.1

Cho $A = [\frac{\pi}{2}, 2]$ và $K = \mathbb{R}^2_+$. Cho $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), x \in A$, trong đó

$$\varphi_1(x) = -x^2 \text{ và } \varphi_2(x) = 1.$$

Dễ kiểm tra rằng φ là tựa K-lõm chính thường mạnh trên A. Tuy nhiên φ_2 là không tựa lõm mạnh.

Ví dụ 1.2

Cho $A = [0, 2]$ và $K = \mathbb{R}^2_+$. Cho $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), x \in A$, trong đó

$$\varphi_1(x) = -x \text{ và } \varphi_2(x) = x.$$

Dễ chỉ ra rằng $\varphi_i,\ (i = 1, 2)$ là tựa lõm mạnh trên A. Tuy nhiên, φ không là tựa K-lõm chính thường mạnh trên A, bởi vì tồn tại $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ và $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ sao cho

$$\varphi(x_0) \notin \varphi(x_1) + K \text{ và } \varphi(x_0) \notin \varphi(x_2) + K,$$

trong đó $x_0 = \lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0) x_2$.

Định nghĩa 1.4 ([3])

Giả sử A là một tập con khác rỗng của không gian tuyến tính X. Một ánh xạ đa trị $T : A \rightrightarrows X$ được gọi là ánh xạ KKM nếu với mọi tập con hữu hạn $\{y_1, \ldots, y_m\}$ của A ta có công thức

$$\operatorname{conv}(\{y_1, \ldots, y_m\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} T(y_i).$$

Định nghĩa 1.5 ([6])

Giả sử $\mathcal{H}$ là một tập con của $\mathbb{R}^n$ và Π là một tập tham số. Lớp tất cả các hàm $\omega : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\bigcap_{\pi \in \Pi} lev_{>0}\omega(\cdot; \pi) = \mathcal{H},$$

được gọi là lớp của các hàm tách yếu chính quy theo $\mathcal{H}$.

Định nghĩa 1.6 ([3])

Giả sử Y là một không gian định chuẩn. Với tập $A \subseteq Y$, hàm $\triangle_A : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được xác định như sau

$$\triangle_A(y) = d_A(y) - d_{Y \setminus A}(y),$$

trong đó $d_A(y) = \inf_{z \in A} \|y - z\|$, $d_\emptyset(y) = +\infty$.

Mệnh đề 1.1 (Xem Mệnh đề 32.1 trong [3])

Nếu tập A khác rỗng và $A \neq Y$, thì

(i) $\triangle_A$ *là giá trị thực;*

(ii) $\triangle_A$ *là* 1-*Lipschitz;*

(iii) *nếu* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ *thì* $\triangle_A(y) < 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{int} A$*;*

(iv) $\triangle_A(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{bd} A$*;*

(v) *nếu* $\operatorname{int} A^c \neq \emptyset$ *thì* $\triangle_A(y) > 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{int} A^c$*;*

(vi) $\triangle_A$ *là thuần nhất dương nếu A là nón với đỉnh là gốc;*