ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 225(06): 298 - 302

ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI ÁNH XẠ CO KIỂU KANNAN TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN

Đoàn Trọng Hiếu[1], Trịnh Văn Hà[2], Hoàng Văn Linh[3]
[1]Trường Đại học Công Nghiệp Quảng Ninh,
[2]Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông - ĐH Thái Nguyên,
[3]Cao đẳng Sư phạm Lạng Sơn

TÓM TẮT

Nhiều bài toán quan trọng trong toán họ c nói riêng và khoa họ c kỹ thuật nói chung dẫn đến việc nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ. Chính vì vậy mà lý thuyết điểm bất động đượ c nhiều nhà toán họ c trên thế giới quan tâm. Giả sử X là một tập hợp khác rỗng. Điểm $x\ 0 \in X$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ $T : X \to X$ nếu $T\ x\ 0 = x\ 0$. Năm 1922 Banach đã chứng minh: "mọi ánh xạ co T từ một không gian metric đầy đủ X vào bản thân nó đều có một điểm bất động duy nhất." Để mở rộng nguyên lý ánh xạ co của Banach, trong bài báo này chúng tôi xây dựng các khái niệm không gian metric nón compact bị chặn, không gian metric nón compact theo quỹ đạo và chứng minh các kết quả về điểm bất động kiểu Kannan trong các không gian này. Bằng cách mở rộng không gian, kết quả của chúng tôi giải quyết các vấn đề: Trong không gian metric nón compact bị chặn và không gian metric nón compact theo quỹ đạo, mọi ánh xạ co kiểu Kannan tồn tại duy nhất điểm bất động.

Từ khóa: *Điểm bất động, kiểu Kannan, không gian metric nón, ánh xạ co, nón chính qui.*

Ngày nhận bài: 10/3/2020; Ngày hoàn thiện: 06/5/2020; Ngày đăng: 22/5/2020

FIXED POINT THEOREMS FOR KANNAN TYPE MAPPINGS IN CONE METRIC SPACES

Doan Trong Hieu[1], Trinh Van Ha[2], Hoang Van Linh[3]
[1]Quang Ninh University of Industry,
[2]TNU - University of Information Technology and Communications,
[3]Lang Son College of Education

ABSTRACT

Many important problems in mathematics in particular and in science and technology in general led to the study of the existence of a fixed point of mapping. That is why fixed point theory is concerned by many mathematicians in the world. Let X be a nonempty. A point $x\ 0 \in X$ is called the fixed point of the mapping $T : X \to X$ if $T\ x\ 0 = x\ 0$. In 1922 Banach proved: "Every contractive mappings of T from a complete metric space X into itself has a unique fixed point." To generalize the Banach contraction priciple, in this paper, we consider the concepts of boundedly compact cone metric space and orbitally compact cone metric space. Moreover, we prove the results of Kannan-type fixed point in these spaces. By expanding the space, our results solve the problems: In the compact cone metric space and compact cone metric space in orbit every Kannan-type contraction map has a unique fixed point.

Keyword: *Fixed point, Kannan-type, cone metric space, contractive mapping, regular cone.*

Received: 10/3/2020; Revised: 06/5/2020; Published: 22/5/2020

* Corresponding author. *Email: hieupci@gmail.com*

1 Giới thiệu

Định lý điểm bất động Banach hay còn gọi là nguyên lý ánh xạ co Banach được giới thiệu năm 1922 bởi nhà toán học Stefan Banach là một công cụ quan trọng để nghiên cứu các hiện tượng phi tuyến. Nó có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân, ... Trước tiên ta nhắc lại nguyên lý này.

Định lý 1. [1] Giả sử (X, d) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn điều kiện co sau

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y), \text{ với mọi } x, y \in X,$$

trong đó $r \in [0, 1)$ là hằng số. Khi đó T có điểm bất động duy nhất $x^* \in X$. Hơn nữa, với mỗi $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

Có rất nhiều nhà toán học trong và ngoài nước đã mở rộng và cải tiến nguyên lý ánh xạ co Banach trên theo hai hướng chính sau đây:

1) Thay thế điều kiện co bởi điều kiện co tổng quát hơn.

2) Thay thế không gian metric (X, d) bởi không gian metric tổng quát hơn.

Theo hướng thứ nhất, năm 1968 Kannan công bố kết quả như sau:

Định lý 2. [2] Giả sử (X, d) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn điều kiện

$$d(Tx, Ty) \leq k\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

với mọi $x, y \in X$ và $k \in [0, \frac{1}{2})$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $x^* \in X$. Hơn nữa, với mỗi $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

Ánh xạ thỏa mãn điều kiện co của định lý trên được gọi là ánh xạ Kannan. Một ý nghĩa quan trọng khác của ánh xạ Kannan là có thể mô tả tính chất đầy đủ của không gian trong điều kiện của tính duy nhất điểm bất động của ánh xạ đó. Điều này được Subrahmanyam chứng minh năm 1975: "Không gian metric (X, d) là đầy đủ khi và chỉ khi mọi ánh xạ Kannan có một điểm bất động duy nhất".

Thời gian gần đây, Górnicki [3] đã chứng minh kết quả sau:

Định lý 3. [3] Giả sử (X, d) là không gian metric compact và $T : X \to X$ là ánh xạ liên tục thỏa mãn điều kiện

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

với mọi $x, y \in X$, $x \neq y$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất. Hơn nữa, với mỗi $x \in X$, dãy $T^n x$ hội tụ đến điểm bất động.

Theo hướng thứ hai, có rất nhiều tác giả đã đề xuất các định lý điểm bất động đối với các ánh xạ co trên những lớp không gian có cấu trúc tượng tự, chẳng hạn Gahler với không gian 2- metric năm 1963, Matthews với không gian metric thứ tự năm 1992, Mustafa và Sims với không gian G- metric năm 2006 và nhiều không gian khác... Đặc biệt, năm 2007 Huang và Zhang [4] lần đầu tiên giới thiệu không gian metric nón bằng cách thay tập số thực $\mathbb{R}$ trong định nghĩa metric thông thường bằng một nón định hướng trong không gian Banach. Trong bài báo này, chúng tôi kết hợp hai hướng mở rộng nguyên lý ánh xạ co Banach nói ở trên. Tức là chứng minh định lý điểm bất động kiểu Kannan trong không gian metric nón. Trước tiên chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả về không gian metric nón.

Cho E là một không gian Banach thực, θ là vectơ không và $P \subset E$. Ta nói, tập P là nón của E nếu

(i) P là tập đóng, khác rỗng, $P \neq \theta$,

(ii) $ax + by \in P$ với mọi $x, y \in P$, a, b là các số không âm,

(iii) $P \bigcap (-P) = \{\theta\}$.

Cho P là một nón trong E, ta định nghĩa $\preceq$ là quan hệ thứ tự bộ phận trên không gian Banach E sinh bởi nón P xác định bởi: $x, y \in E; x \preceq y$ khi và chỉ $y - x \in P$. Nếu $x \preceq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x \prec y$. Nếu $y - x \in \text{intP}$ thì ta viết $x \ll y$, intP là phần trong của nón P. P được gọi là nón chuẩn tắc nếu tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E, \theta \preceq x \preceq y$ kéo theo $\|x\| \preceq K\|y\|$. Số thực dương nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức trên được gọi là hằng số chuẩn tắc của P.

P được gọi là nón chính quy nếu mọi dãy đơn điệu tăng mà bị chặn trên đều hội tụ. Nghĩa là, nếu dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_1 \preceq x_2 \preceq ... \preceq x_n \preceq ... \preceq y$ với $y \in E$. Khi đó, tồn tại $x \in E$

sao cho $\|x_n - x\| \to \theta\, (n \to \infty)$. Tương tự, P được gọi là nón chính quy khi và chỉ khi mọi dãy giảm mà bị chặn dưới đều hội tụ.

Mệnh đề 1. [5] Mọi nón chính quy là nón chuẩn tắc.

Định nghĩa 1. [4] Giả sử X là tập khác rỗng. Ánh xạ $d : X \times X \to E$ được gọi là metric nón trên X nếu

(d1) $\theta \preceq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$ và $d(x, y) = \theta$ nếu và chỉ nếu $x = y$;

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi $x, y \in X$;

(d3) $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Khi đó (X, d) được gọi là không gian metric nón.

Định nghĩa 2. [4] Giả sử (X, d) là không gian metric nón. $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của X. Ta nói rằng

(i) dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là x nếu với mọi $e \in E, \theta \ll e$ tồn tại số n_0 sao cho $d(x_n, x) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Kí hiệu $x_n \to x$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nếu với mọi $e \in E, \theta \ll e$ tồn tại số n_0 sao cho $d(x_n, x_m) \ll e$ với mọi $n, m \geq n_0$.

(iii) (X, d) là không gian metric nón đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy đều hội tụ.

Mệnh đề 2. [4] Giả sử (X, d) là không gian metric nón và $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của X. Khi đó, ta có

(i) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới $x \in X$ thì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

(ii) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới $x \in X$ và $\{x_n\}$ hội tụ tới $y \in X$ thì $x = y$.

Mệnh đề 3. [4] Giả sử (X, d) là không gian metric nón, P là nón chuẩn tắc và $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy trong X. Khi đó

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = \theta$.

(ii) $\{x_n\}$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = \theta$.

(iii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in X$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

Định nghĩa 3. [4] Giả sử (X, d) là không gian metric nón. Nếu với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong X đều có một dãy con $\{x_{n_i}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_i}\}$ hội tụ trong X thì (X, d) được gọi là không gian metric nón compact dãy.

Định nghĩa 4. Không gian metric nón (X, d) được gọi là compact bị chặn nếu mọi dãy bị chặn trong X có một dãy con hội tụ.

Định nghĩa 5. Giả sử (X, d) là không gian metric nón và ánh xạ $T : X \to X$. Khi đó, quỹ đạo của T tại $x \in X$ được xác định bởi

$$O_x(T) = \{x, Tx, T^2x, ...\}.$$

Định nghĩa 6. Giả sử (X, d) là không gian metric nón và ánh xạ $T : X \to X$. Khi đó, (X, d) được gọi là không gian metric nón compact theo quỹ đạo nếu mọi dãy trong $O_x(T)$ đều chứa một dãy con hội tụ với mọi $x \in X$.

Remark 1. Khái niệm compact bị chặn và compact theo quỹ đạo của không gian metric nón là hoàn toàn khác biệt. Ví dụ sau minh họa cho điều đó.

Ví dụ 1. Xét $E = \mathbb{R}, P = \mathbb{R}_+$. Với không gian metric nón thông thường (X, d), ở đây $X = \mathbb{R}_+$ và $d(x, y) = |x - y|$, xét ánh xạ $T : X \to X$ bởi $Tx = 2x$. Khi đó (X, d) là không gian metric nón compact bị chặn nhưng không là không gian metric nón compact theo quỹ đạo.

Định nghĩa 7. Giả sử (X, d) là không gian metric nón. Ánh xạ $T : X \to X$ được gọi là liên tục theo quỹ đạo nếu với mỗi $x \in X$ và dãy $\{x_n\}$ trong $O_x(T)$ thỏa mãn $x_n \to \bar{x} \in X$ thì $Tx_n \to T\bar{x}$.

2 Định lý điểm bất động kiểu Kannan trong không gian metric nón

Trong phần này, chúng tôi chứng minh một số định lý điểm bất động kiểu Kannan trong không gian metric nón compact bị chặn và không gian metric nón compact theo quỹ đạo.

Định lý 4. *Giả sử (X, d) là không gian metric nón compact bị chặn, P là nón chính quy và $T : X \to X$ là ánh xạ liên tục theo quỹ đạo thỏa mãn điều kiện*

$$d(Tx, Ty) \prec \frac{1}{2}\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right]$$

với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất trong X.

Chứng minh. Với mỗi $x_0 \in X$, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ bởi công thức $x_{n+1} = Tx_n$ với mọi $n \geq 0$. Nếu tồn tại số n sao cho $x_{n+1} = x_n$, khi đó x_n là điểm bất động của T. Giả sử, với mọi $n \geq 0, x_{n+1} \neq x_n$. Đặt $d_n = d(x_n, x_{n+1})$, khi đó

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\prec \frac{1}{2}\left[d(x_n, Tx_n) + d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[d_n + d_{n+1}\right]. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên chứng tỏ $d_{n+1} \prec d_n$ với mọi n. Vậy dãy $\{d_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi θ. Do P là nón chính quy nên tồn tại $d^* \in E, \theta \preceq d^*$ sao cho $d_n \to d^*$ $(n \to \infty)$. Mặt khác, với $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \\ &\prec \frac{1}{2}\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{m-1}, x_m)\} \\ &= \frac{1}{2}(d_{n-1} + d_{m-1}) \\ &\prec d_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ bị chặn trong X. Vì X là compact bị chặn nên tồn tại dãy con $\{x_{n_i}\}$ của $\{x_n\}$ và $z \in X$ sao cho $x_{n_i} \to z$ $(i \to \infty)$. Bởi tính liên tục theo quỹ đạo của T nên $d^* = d(z, Tz) = d(Tz, T^2z)$. Ta chứng minh $d^* = \theta$. Thật vậy, giả sử $\theta \prec d^*$. Khi đó $z \neq Tz$. Theo giả thiết ta có

$$d(z, Tz) \prec \frac{1}{2}\{d(z, Tz) + d(Tz, T^2z)\}.$$

Điều này kéo theo

$$d(z, Tz) \prec d(Tz, T^2z).$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với $d(z, Tz) = d(Tz, T^2z)$. Vậy $d^* = \theta$. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \theta$. Mặt khác theo (1), ta có

$$d(x_n, x_m) \prec \frac{1}{2}(d_{n-1} + d_{m-1}) \text{ với mọi } n, m \in \mathbb{N}^*.$$

Cho $n, m \to \infty$ ta thu được

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = \theta.$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ là Cauchy trong X. Vì dãy Cauchy $\{x_n\}$ chứa dãy con $\{x_{n_i}\}$ hội tụ về z nên ta khẳng định $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$. Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\preceq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz) \\ &= d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz) \\ &\prec d(z, x_{n+1}) + \frac{1}{2}\{d(x_n, Tx_n) + d(z, Tz)\} \\ &= d(z, x_{n+1}) + \frac{1}{2}\{d(x_n, x_{n+1}) + d(z, Tz)\} \end{aligned}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra

$$d(z, Tz) \prec 2d(z, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Cho $n \to \infty$ ta thu được $d(z, Tz) = \theta$. Điều này kéo theo $z = Tz$. Chứng tỏ z là điểm bất động của T. Bây giờ ta chỉ ra z là điểm bất động duy nhất của T. Thật vậy, giả sử $z^* \neq z$ là điểm bất động của T. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} d(z, z^*) &= d(Tz, Tz^*) \\ &\prec \frac{1}{2}\{d(z, Tz) + d(z^*, Tz^*)\} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Điều này không thể xảy ra. Vậy z là điểm bất động duy nhất của T. □

Chứng minh hoàn toàn tương tự như Định lý 4 ta thu được định lý điểm bất động kiểu Kannan cho không gian metric nón compact theo quỹ đạo dưới đây.

Định lý 5. *Giả sử (X, d) là không gian metric nón compact theo quỹ đạo, P là nón chính quy và $T : X \to X$ là ánh xạ liên tục theo quỹ đạo thỏa mãn điều kiện*

$$d(Tx, Ty) \prec \frac{1}{2}\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right]$$

với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất trong X.

Chứng minh. Với mỗi $x_0 \in X$, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ bởi công thức $x_{n+1} = Tx_n$ với mọi $n \geq 0$. Chứng minh hoàn toàn tương tự như Định lý 4, ta được $d_n \to d^* \ (n \to \infty)$, với $d_n = d(x_n, x_{n+1})$. Vì X là compact theo quỹ đạo nên tồn tại dãy con $\{x_{n_i}\}$ của $\{x_n\}$ và $z \in X$ sao cho $x_{n_i} \to z \ (i \to \infty)$. Bởi tính liên tục theo quỹ đạo của T nên $d^* = d(z, Tz) = d(Tz, T^2z)$. Bằng lập luận hoàn toàn như Định lý 4, ta chỉ ra $d^* = \theta$ và T có duy nhất điểm bất động. $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] . S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fund. Math.,* vol. 3, pp. 133-181, 1922.

[2] . R. Kannan, "Some results on fixed points," *Bull. Calcutta Math. Soc.,* vol. 60, pp. 71–76, 1968.

[3] . J. Górnicki, "Fixed point theorems for Kannan type mappings," *J. Fixed Point Theory Appl,* vol. 19, no. 3, pp. 2145–2152, 2017.

[4] . L.-G. Huang, and X. Zhang, "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings," *J. Math. Anal. Appl,* vol. 332, pp. 1468-1476, 2007.

[5] . Sh. Rezapour, and R. Hamlbarani, "Some notes on the paper: Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings," *J. Math. Anal. Appl,* vol. 345, pp. 719-724, 2008.