ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 225(06): 255 - 257

ĐỘ PHỨC TẠP TÔPÔ BẬC CAO CỦA PHẦN BÙ CÁC ĐƯỜNG THẲNG PHỨC

Trần Huệ Minh*, Nguyễn Văn Ninh
Trường Đại học Sư phạm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Phần bù của sắp xếp các đường thẳng phức trong C^2 là một đa tạp trơn có nhiều tính chất hình học và được quan tâm nghiên cứu nhiều trong lý thuyết sắp xếp các siêu phẳng. Một số bất biến hình học của đa tạp này là xác định tổ hợp, nghĩa là chúng chỉ phụ thuộc vào dàn các giao của các đường thẳng. Trong bài báo này, nhóm tác giả tính toán độ phức tạp tôpô bậc cao của phần bù của sắp xếp tâm của các đường thẳng phức trong C^2 và chỉ ra sự phụ thuộc tổ hợp của bất biến hình học này.

Từ khóa: *sắp xếp các đường thẳng phức; phụ thuộc tổ hợp; độ phức tạp tôpô bậc cao; đa dạng trơn; bất biến hình học.*

Ngày nhận bài: 13/3/2020; Ngày hoàn thiện: 12/5/2020; Ngày đăng: 21/5/2020

THE HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF A COMPLEMENT OF COMPLEX LINES ARRANGEMENT

Tran Hue Minh*, Nguyen Van Ninh
TNU – University of Education

ABSTRACT

The complement of complex lines arrangement in C^2 is a smooth manifold with many geometric properties v interested in studying the theory of the hyperplanes arrangement. Some geometric invariants of this manifold are combinatorial dependence, meaning they depend only on the set of intersections of lines. In this paper, we calculate the high topological complexity of the complement of the center complex lines arrangement in C^2 and show the combinatorial dependence of this geometric invariant.

Keywords: *complement of complex lines arrangement; combinatorial dependence; higher topological complexity; smooth manifold; geometric invariants.*

Received: 13/3/2020; Revised: 12/5/2020; Published: 21/5/2020

* Corresponding author. *Email: tranhueminh@gmail.com*

1 Độ phức tạp tôpô bậc cao

Cho X Là một không gian liên thông đường, $J_n, n \in \mathbb{N}$ là tích kết của n đoạn đơn vị $[0,1]_i$, $i = 1, ..., n$ tại điểm cơ sở là 0. ĐặtX^{J_n} là không gian các ánh xạ liên tục từ J_n tới X với tôpô compact mở. Xét anh xạ

$$\begin{array}{rccc} e_n : & X^{J_n} & \longrightarrow & X^n \ , \\ & \gamma & \longmapsto & (\gamma(1_1), ..., \gamma(1_n)) \end{array}$$

với 1_i là đơn vị của $[0,1]_i$ tương ứng. Khi đó e_n là một phân thớ theo nghĩa Serre.

Định nghĩa 1. Độ phức tạp tôpô bậc cao $TC_n(X)$ của không gian tôpô X là số nguyên dương nhỏ nhất k thỏa mãn tồn tại một phủ mở $\{X_i, i = 1, ..., k\}$ của X^n sao cho trên mỗi tập X_i tồn tại nhát cắt liên tục $s_i : X_i \to X^{J_n}$ của e_n (nghĩa là, $e_n \circ s_i = id_{X_i}$).

Định nghĩa này được Y. Rudyak đưa ra trong[1]. Trong trường hợp $n = 2$, $TC_2(X)$ trùng với khái niệm độ phức tạp tôpô $TC(X)$ được M.Farber đưa ra trong [2].

Có thể hiểu $TC_n(X)$ là giống Schwarz của phân thớ e_n.

Remark 1. Chú ý rằng e_n là cái thế phân thớ của $d_n : X \to X^n$ (nghĩa là tồn tại một tương đương đồng luân $h : X \to X^{J_n}$ sao cho $d_n = e_n \circ h$) và do đó $TC_n(X)$ cũng là giống Schwarz của ánh xạ d_n (xem [1]).

Sau đây là một số tính chất quan trọng của TC_n.

1. $TC_n(X)$ là một bất biến đồng luân. Nghĩa là nếu X tương đương đồng luân với X' thì $TC_n(X) = TC_n(X')$.
2. Cho X và Y là các không gian liên thông đường. Khi đó

$$TC_n(X \times Y) \leq TC_n(X) + TC_n(Y) - 1. \quad (1)$$

3. Vì e_n là cái thế phân thớ của ánh xạ $d_n : X \to X^n$ nên ta có tính chất sau: Giả sử m là một số nguyên dương, $u_i \in H^*(X^n)$ với $i = 1, ..., m$ là các lớp đối đồng điều thỏa mãn $d_n^* u_i = 0$ và $u_1 \cup u_2 \cup ... \cup u_k \neq 0 \in H^*(X^n)$. khi đó $TC_n(X) \geq k + 1$.

Remark 2. Giả sử X là không gian liên thông đường và u một lớp đối đồng điều trong $H^*(X)$. Đặt

$$\bar{u} = (\sum_{i=1}^{n-1} 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes \overset{\overset{i}{\vee}}{u} \otimes 1 \otimes ... \otimes 1) - 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes (n-1)u,$$

$$\bar{u}_t = 1 \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes \overset{\overset{t}{\vee}}{u} \otimes ... \otimes 1 - u \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes 1.$$

Đây là các lớp đối đồng điều trong $H^*(X^n) \cong \underbrace{H^*(X) \otimes ... \otimes H^*(X)}_{n \text{ lần}}$ thỏa mãn $d_n^* \bar{u} = 0$ và $d_n^* \bar{u}_t = 0$ với mọi $t = 2, ..., n$.

Trong trường hợp tổng quát việc tính độ phức tạp tôpô của một không gian rất phức tạp. Do đó, thông thường ta chỉ có thể đưa ra các chặn trên và chặn dưới cho bất biến này.

2 Độ phức tạp tôpô bậc cao của phần bù các đường thẳng phức trong $\mathbb{C}^2$

Trong phần này, chúng tôi đưa ra kết quả cụ thể về độ phức tạp tôpô bậc cao của một số lớp các sắp xếp của các đường thẳng phức trong $\mathbb{C}^2$. Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản sau (xem [3])

Định nghĩa 2. 1. Một sắp xếp các đường thẳng trong $\mathbb{C}^2$ là một tập hợp hữu hạn $\mathcal{A}$ các đường thẳng (phức) của $\mathbb{C}^2$.
2. Một sắp xếp các đường thẳng $\mathcal{A}$ trong C^2 được gọi là sắp xếp tâm nếu giao của tất cả các đường thẳng trong $\mathcal{A}$ là khác rỗng.

Remark 3. Nếu $\mathcal{A}$ là một sắp xếp tâm thì ta có thể coi các đường thẳng trong $\mathcal{A}$ đều đi qua gốc tọa độ.

Định nghĩa 3. Cho $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ là một sắp xếp các đường thẳng trong $\mathbb{C}^2$.
1. Tập hợp $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{\cup_{i=1}^n H_i\}$ gọi là phần bù của của sắp xếp $\mathcal{A}$.
2. $L(\mathcal{A}) = \{\cap_{i=1}^n H_i, H_1, \cdots, H_n, \mathbb{C}^2\}$ gọi là dàn của $\mathcal{A}$.
3. Một tính chất hình học của $M(\mathcal{A})$ được gọi là xác định tổ hợp nếu nó được xác định hoàn toàn từ $L(\mathcal{A})$.

Để tính toán được độ phức tạp tôpô bậc cao của phần bù ta nhắc lại kết quả sau.

Mệnh đề 1. *Gọi X_m là tích kết của m đường tròn $\mathbb{S}^1$. Khi đó*

$$TC_n(X_m) = \begin{cases} n & \text{nếu } m = 1 \\ n+1 & \text{nếu } m > 1. \end{cases}$$

Kết quả này được trình bày trong [1] với $m = 1$ và trong [4] với $m > 1$.

Mệnh đề 2. *[5] Độ phức tạp tôpô bậc cao của xuyến T cho bởi*

$$TC_n(T) = n + 1.$$

Trước hết ta xét trường hợp sắp xếp tâm. Ta có kết quả sau

Định lý 1. *Cho $\mathcal{A}$ là sắp xếp tâm gồm l đường thẳng phức trong $\mathbb{C}^2$, $M = M(\mathcal{A})$ là phần bù. Khi đó*

$$TC_n(M) = \begin{cases} n & \text{nếu } l = 1 \\ 2n-1 & \text{nếu } l = 2 \\ 2n & \text{nếu } l > 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Không mất tổng quát ta coi các đường thẳng trong $\mathcal{A}$ đều đi qua gốc.

Trường hợp 1: Nếu $l = 1$ thì M tương đương đồng luân với $\mathbb{C}^*$. Do dó M tương tương đồng luân với $\mathbb{S}^1$. Theo Mệnh đề 1 ta có $TC_n(M) = TC_n(X_1) = n$.

Trường hợp 2: Nếu $l = 2$ thì $M = (\mathbb{C}^*)$ khi đó M có kiểu đồng luân của xuyến hai chiều T. Theo Mệnh đề 2 ta có $TC_n(M) = TC_n(T) = 2n - 1$.

Trường hợp 3. Nếu $l > 2$: Gọi $d\mathcal{A}$ là giải nón của $\mathcal{A}$. Khi đó $d\mathcal{A}$ là sắp xếp gồm $l-1$ điểm trong $\mathbb{C}$, do đó $M(d\mathcal{A})$ là mặt phẳng phức bỏ đi $l-1$ điểm nên $M(d\mathcal{A})$ tương đương đồng luân với X_{l-1}. Do đó áp dụng Mệnh đề 1 ta được.

$$TC_n(M(d\mathcal{A})) = TC_n(X_{l-1}) = n + 1.$$

Mặt khác, ta có $M \approx M(d\mathcal{A}) \times \mathbb{C}^*$ (xem [3]), do đó áp dụng bất đẳng thức 1 ta được

$$\begin{aligned} TC_n(M) &\leq TC_n(M(d\mathcal{A})) + TC_n(\mathbb{C}^*) - 1 \\ &= n + 1 + n - 1 = 2n. \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $TC_n(M) \geq 2n$. Thật vậy, ta đồng nhất các phần tử của $\mathsf{A}(\mathcal{A})$ với các phần tử của $H^*(M)$. Do đó đại số $H^*(M)$ sinh bởi bởi $a_1, ..., a_l$ với các quan hệ như sau ${e_i}^2 = 0, e_i e_j = -e_j e_i$. Chọn 3 phần tử tương ứng $i = 1, 2, 3$ ta đặt

$$\bar{a}_{i_t} = 1 \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes \overset{\overset{t}{\vee}}{a_i} \otimes ... \otimes 1 - a_i \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \quad t = 2, ..., n$$

$$\pi = \bar{a}_{3_n} \prod_{t=2}^{n} \bar{a}_{1_t} . \prod_{t=2}^{n} \bar{a}_{2_t} \neq 0$$

mặt khác $d_n^* \bar{a}_{i_t} = 0$ với mọi $i = 1, ..., l-1, t = 2, ..., n$. Áp dụng Định lý **??** ta được

$$TC_n(M) \geq 1 + n - 1 + n - 1 + 1 = 2n.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Từ định lý trên ta thấy, đối với trường hợp sắp xếp tâm thì TC_n chỉ phụ thuộc vào số đường thẳng của $\mathcal{A}$ do đó ta có

Corollary 1. *Đối với sắp xếp tâm các đường thẳng phức thì độ phức tạp tôpô bậc cao của phần bù xác định tổ hợp.*

3 Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã tính được độ phức tạp tôpô bậc cao của phần bù của sắp xếp tâm các đường thẳng phức trong $\mathbb{C}^2$. Từ kết quả đó, ta suy ra sự phụ thuộc tổ hợp của độ phức tạp tôpô bậc cao của lớp các sắp xếp tâm các đường thẳng phức trong $\mathbb{C}^2$.

Tài liệu tham khảo

[1] Yuli B. Rudyak, "On higher analogs of topological complexity", *Topology and its Applications*, Vol 157, pp 916-920, 2010.

[2] M.Farber, "Topology of robot motion planning", *Topology and its Application*, Vol 140, pp 245 - 266, 2004.

[3] P.Orlik and H.Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Springer - Verlag, 1992.

[4] Tran Hue Minh, Nguyen Van Ninh, "The higher topological complexity of wegde product of spheres", *TNU Journal of Science and Technology*, Vol 204, 11, pp 195-198, 2019 .

[5] I. Basabe, J. González, Y.B. Rudyak, and D. Tamaki, *Higher topological complexity and its symmetrization*, Algebr. Geom. Topology, Vol 14 , pp 223-244, 2014 .