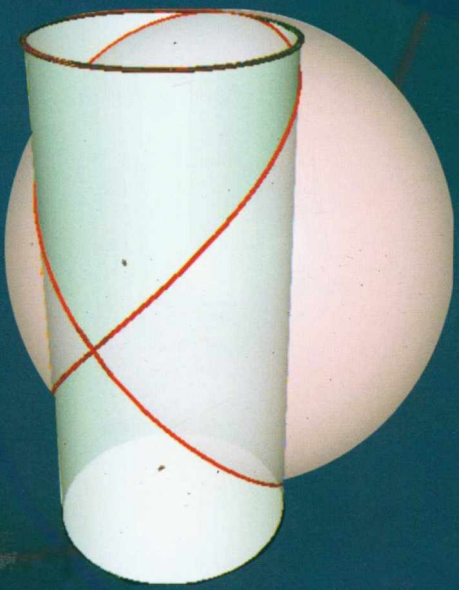
GT.0000027404

PGS.TS. TÔ VĂN BAN

GIÁO TRÌNH
GIẢI TÍCH II



GUYÊN
LIỆU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG XÉT DUYỆT GIÁO TRÌNH

GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN	– Chủ tịch
PGS.TS. NGUYỄN XUÂN VIÊN	– Uỷ viên phản biện
PGS.TS. LÊ BÁ LONG	– Uỷ viên phản biện
TS. NGUYỄN ĐỨC NỤ	– Uỷ viên phản biện
TS. CUNG THẾ ANH	– Thư ký, uỷ viên phản biện

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU 7

CÁC KÝ HIỆU HAY SỬ DỤNG 9

Chương 1. HÀM NHIỀU BIẾN SỐ 11

§1.1. GIỚI HẠN – LIÊN TỤC 11

1.1.1. Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$ 11

1.1.2. Hàm nhiều biến số 15

1.1.3. Giới hạn của hàm nhiều biến 18

1.1.4. Sự liên tục của hàm số 20

§1.2. ĐẠO HÀM – VI PHÂN 22

1.2.1. Đạo hàm riêng 22

1.2.2. Vi phân của hàm nhiều biến 24

1.2.3. Đạo hàm riêng của hàm hợp 30

1.2.4. Đạo hàm hàm số ẩn 34

1.2.5. Đạo hàm theo hướng – Gradient 38

1.2.6. Đạo hàm và vi phân cấp cao 42

1.2.7. Công thức Taylor 45

§1.3. CỰC TRỊ 47

1.3.1. Cực trị địa phương của hàm nhiều biến 47

1.3.2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số 53

1.3.3. Cực trị có điều kiện 56

§1.4. MỘT SỐ VÍ DỤ TỔNG HỢP 62

1.4.1. Các ví dụ vận dụng kỹ năng tổng hợp 62

1.4.2. Các ví dụ và bài tập thực tiễn 70

§1.5. SƠ LƯỢC VỀ HÌNH HỌC VI PHÂN 77

1.5.1. Đường cong phẳng 77

1.5.2. Đường cong trong không gian 83

1.5.3. Mặt cong 88

TÓM TẮT CHƯƠNG 1 90

EXERCISES – BÀI TẬP 93

Chương 2. TÍCH PHÂN BỘI 109

§2.1. TÍCH PHÂN KÉP 109

2.1.1. Mở đầu 109

2.1.2. Cách tính trong toạ độ Descates 112

2.1.3. Đổi biến số với tích phân kép 116

2.1.4. Ứng dụng của tích phân kép 124

§2.2. TÍCH PHÂN BỘI BA 128

2.2.1. Mở đầu 128

2.2.2. Cách tính tích phân bội ba trong toạ độ Descates ... 130

2.2.3. Đổi biến số trong tích phân bội ba 135

2.2.4. Ứng dụng của tích phân bội ba 142

§2.3. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ 146

2.3.1. Tích phân thường phụ thuộc tham số 146

2.3.2. Tích phân phụ thuộc tham số với cận là hàm số ... 149

2.3.3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số 150

§2.4. MỘT SỐ VÍ DỤ VÀ BÀI TOÁN TỔNG HỢP 155

TÓM TẮT CHƯƠNG 2 166

EXERCISES – BÀI TẬP 169

Chương 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – TÍCH PHÂN MẶT 184

§3.1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT 184

3.1.1. Mở đầu 184

3.1.2. Cách tính 187

§3.2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI 188

3.2.1. Mở đầu 188

3.2.2. Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và loại hai 192

3.2.3. Cách tính 192

3.2.4. Công thức Green 195

3.2.5. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân 199

§3.3. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT 209

3.3.1. Mở đầu 209

3.3.2. Ý nghĩa 2 0

3.3.3. Cách tính 2 0

§3.4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI 212
3.4.1. Mặt định hướng 212
3.4.2. Tích phân mặt loại hai 215
3.4.3. Ý nghĩa 218
3.4.4. Cách tính 218
3.4.5. Công thức Stokes 222
3.4.6. Công thức Ostrogradski – Gauss 223
§3.5. LÝ THUYẾT TRƯỜNG 225
3.5.1. Trường vô hướng 225
3.5.2. Trường vectơ 228
3.5.3. Toán tử vi phân 237
§3.6. MỘT SỐ VÍ DỤ TỔNG HỢP 242
TÓM TẮT CHƯƠNG 3 251
EXERCISES – BÀI TẬP 253

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 267

§4.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT 267
4.1.1. Các khái niệm mở đầu 267
4.1.2. Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một 268
4.1.3. Phương trình với biến số phân ly (Phương trình tách biến) 271
4.1.4. Phương trình thuần nhất 273
4.1.5. Phương trình tuyến tính 276
4.1.6. Phương trình Bernoulli 281
4.1.7. Phương trình toàn phần 282
4.1.8. Trường hệ số góc 284
4.1.9. Quỹ đạo trực giao 286
§4.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI 287
4.2.1. Mở đầu 288
4.2.2. Các phương trình vi phân giảm cấp được 289
4.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính 291
4.2.4. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange 293
4.2.5. Phương trình tuyến tính với hệ số hằng số và vế phải đặc biệt 295

§4.3. SƠ LƯỢC VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 308
4.3.1. Định nghĩa – Bài toán Cauchy
Các loại nghiệm 308
4.3.2. Giải hệ phương trình vi phân..... 309
4.3.3. Hệ phương trình vi phân thuần nhất hệ số
hằng số 314
§4.4. MỘT SỐ VÍ DỤ VÀ BÀI TOÁN TỔNG HỢP 320
TÓM TẮT CHƯƠNG 4..... 333
EXERCISES – BÀI TẬP..... 335

TÀI LIỆU THAM KHẢO..... 350

Lời nói đầu

Sự vật và hiện tượng vốn có những mối liên hệ chằng chịt theo lối mạng nhện, yếu tố này phụ thuộc vào những yếu tố khác trong một tổng thể chuyển động. Để thấy bản chất của hiện tượng cũng như mở rộng khả năng đi vào cuộc sống của toán học, chúng ta cần nghiên cứu giải tích trong phạm vi nhiều biến. Với hàm nhiều biến, nhiều khái niệm và kết quả của hàm một biến không còn bảo toàn mà có những biến thể tinh vi, uyển chuyển và hứa hẹn những ứng dụng vô cùng rộng lớn. ***Giáo trình Giải tích II*** *– một sự tiếp tục của* ***Giáo trình Giải tích I*** *– hướng chủ yếu vào phép tính vi phân, phép tính tích phân của hàm nhiều biến.*

Trong chương đầu giới thiệu vài nét về tập hợp trong không gian $\mathbb{R}^n$*; về giới hạn, liên tục, đạo hàm riêng, vi phân của hàm nhiều biến. Chúng ta thấy ứng dụng của các kiến thức này trong việc tìm cực trị, cực trị với ràng buộc và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số. Đôi điều về hình học vi phân – một ngành của toán học dùng giải tích để nghiên cứu các đối tượng hình học – cũng được trình bày. Chương 2 dành cho phép tính tích phân bội trong* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ *và tích phân phụ thuộc tham số, vốn là công cụ đắc lực để nghiên cứu các hàm đặc biệt và Lý thuyết xác suất. Tích phân đường, tích phân mặt trong không gian được tìm thấy ở Chương 3, ở đó các ứng dụng vật lý, những khái niệm tối cần thiết cho nhà kỹ thuật tương lai được trang bị: lực, công, thông lượng, hoàn lưu,... Chương cuối cùng dành cho phương trình vi phân, là điều thiết yếu để nghiên cứu sự vật trong sự chuyển động. Ở đây ta thấy những kết quả quan trọng nhất và cô đọng về phương trình vi phân cấp một, cấp cao và hệ phương trình vi phân.*

Các ví dụ và bài toán điển hình thường ở cuối mỗi chương được chọn lựa kỹ càng từ các lĩnh vực vật lý, cơ học, hoá học, sinh học, dược học, cổ sinh vật học cho đến môi trường, âm thanh học,

thiên văn, kinh tế, nghề cá, kinh doanh,... cho thấy mảng ứng dụng vô tiền khoáng hậu của lý thuyết, đảm bảo sự trường tồn của toán học. Để cổ vũ phong trào học và sử dụng tiếng Anh, chúng tôi viết phần bài tập dưới dạng song ngữ có tinh giản công thức. Hy vọng điều này mang đến hương vị riêng, làm cho những điều huyền bí của toán học trên thế giới trở nên gần gũi.

Với mong muốn tạo sự dễ dàng cho việc tiếp nhận, các khái niệm, định lý, tính chất,... thường được phát biểu bằng lời và kết hợp với công thức. Sau các thuật ngữ, ký hiệu chủ đạo thường có thuật ngữ, ký hiệu đi kèm; điều này giúp độc giả dễ dàng so sánh, tiếp thu các tài liệu khác. Cuối mỗi chương là phần tóm lược những kết quả chính, điều này giúp ta hình dung khái quát và dễ dàng nhớ những ý chính. Chúng tôi cũng nhắc lại rằng, những mục, phần, đoạn nâng cao, có tính chất tham khảo có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên được in nhỏ hơn và bắt đầu bởi (✡), kết thúc bởi (☼).

Tác giả tỏ lòng cám ơn chân thành đến Hội đồng xét duyệt giáo trình đã đọc kỹ bản thảo, cho những đóng góp quý báu về cấu trúc, lối trình bày, nội dung chi tiết,... để cuốn sách được hoàn thiện. Trong quá trình soạn thảo, các đồng nghiệp như ThS. Vũ Anh Mỹ, ThS. Tô Văn Đinh, ThS. Đào Trọng Quyết, ThS. Nguyễn Thị Quyên, ThS. Phan Thu Hà, ThS. Nguyễn Thị Thanh Hà, ThS. Bùi Văn Định, TS. Nguyễn Trọng Toàn, ThS. Tạ Ngọc Ánh cùng nhiều đồng nghiệp khác ở Đại học Mỏ – Địa chất, Đại học Hải Phòng và đặc biệt là ở Bộ môn Toán – Học viện Kỹ thuật Quân sự đã cổ vũ, động viên, đọc kỹ bản thảo và cho những góp ý, chỉnh lý thiết thực, có giá trị; lãnh đạo Khoa Công nghệ thông tin, lãnh đạo Học viện Kỹ thuật Quân sự đã tạo mọi điều kiện để cuốn sách sớm ra mắt bạn đọc; các biên tập viên ở Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã làm cho cuốn giáo trình có một chất lượng mới. Những sự cổ vũ, ủng hộ ấy khó có thể nói hết bằng một lời cảm ơn chân thành của tác giả.

Hà Nội, tháng 5 – 2012

TÁC GIẢ

CÁC KÝ HIỆU HAY SỬ DỤNG

Ký hiệu	Ý nghĩa
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	Tập các số thực, không gian Euclide n chiều.
d(M, N)	Khoảng cách giữa hai điểm M, N.
$U_\varepsilon(a)$	Hình cầu mở tâm a, bán kính ε.
MaxA, MinA	Phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của tập A.
GTLN, GTNN	Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
$f(x),\ f(x_1,...,x_n)$	Hàm số một biến, hàm số n biến.
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$	Giới hạn của hàm hai biến.
$f'_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}, f'_y, \dfrac{\partial f}{\partial y}$	Đạo hàm riêng cấp một.
$f''_{xx}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{xy}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	Đạo hàm riêng cấp hai.
$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}, \dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$	Định thức Jacobi (Jacobian).
$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$	Đạo hàm theo hướng vectơ $\vec{\ell}$.
$df, d^2f,...$	Vi phân cấp một, cấp hai,... của hàm f.
$\overrightarrow{\text{grad}}\, u$	Vectơ gradient của hàm (trường vô hướng) u.
$\iint\limits_D f\,dxdy,\ \iiint\limits_V f\,dxdydz$	Tích phân bội hai, bội ba.
$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,ds,\ \int\limits_L f\,ds$	Tích phân đường loại một.
$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$	Tích phân đường loại hai.

Ký hiệu	Ý nghĩa
$\iint\limits_S f(M)dS$, $\iint\limits_S f\,dS$	Tích phân mặt loại một.
$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$	Tích phân mặt loại hai.
$\vec{F}(M)$, $\vec{F}(x,y,z)$	Trường vectơ.
$\operatorname{div}\vec{F}$	Divergence của trường $\vec{F}$.
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{F})$	Vectơ xoáy của trường $\vec{F}$.
$\vec{\nabla}$	Toán tử del (toán tử nabla, toán tử Haminton).
PTVP	Phương trình vi phân.
$\vec{u}\bullet\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$.	Tích vô hướng, tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.
□	Kết thúc chứng minh.
#	Kết thúc ví dụ.
(✡), ((☼))	Bắt đầu (kết thúc) mục, phần,... có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên.