NGUYỄN TIẾN QUANG (Chủ biên)
PHẠM THỊ CÚC - ĐẶNG ĐÌNH HANH

Hướng dẫn giải bài tập
ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN TIẾN QUANG (Chủ biên)
PHẠM THỊ CÚC – ĐẶNG ĐÌNH HANH

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Đại số đại cương là một trong những môn học đầu tiên về toán học trừu tượng trong chương trình đào tạo của các trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Sư phạm – Cao đẳng Sư phạm. Nó làm cơ sở cho việc học tập tiếp những môn học khác của chương trình Cử nhân cũng như chương trình Cao học. Ở đây người đọc lần đầu chuyển từ tư duy "toán sơ cấp" sang tư duy "trừu tượng" về đại số. Điều đó gây không ít khó khăn cho người đọc. Thực tế cho thấy, để hình thành kiểu tư duy mới này, chúng ta cần có sự hỗ trợ rất lớn của một hệ thống bài tập. Ngoài một số bài toán có tính chất áp dụng trực tiếp lý thuyết vào các đối tượng cụ thể, còn có những bài toán là sự tìm hiểu sâu nội dung môn học, đòi hỏi chúng ta không chỉ có kỹ năng mà còn phải có phương pháp, thói quen tư duy mới, có sáng tạo.

Các giáo trình về Đại số đại cương có khá nhiều, mỗi cuốn thường có một hệ thống bài tập kèm theo, phù hợp với các vấn đề về lý thuyết đã trình bày. Nhiều bài tập trong cuốn sách này được tuyển chọn từ một số giáo trình như: "Đại số" của G. Birkhoff và S. MacLane, "Đại số" của S. Lang, "Đại số" của T. W. Hungerford, "Đại số với ứng dụng hiện đại" của W. J. Gilbert và W. K. Nichonson, "Bài giảng về đại số đại cương" của A. G. Curos, "Đại số đại cương" của Hoàng Xuân Sính, "Bài tập đại số" của Trần Văn Hạo và Hoàng Kỳ, "Bài tập đại số" của Bùi Huy Hiền... Các bài toán này được sắp xếp và có lời giải phù hợp với cuốn giáo trình "Đại số đại cương" của Nguyễn Tiến Quang. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các tác giả đã dẫn trong sách.

Cuốn sách được chia làm hai phần: Phần thứ nhất trình bày tóm tắt lý thuyết và hệ thống bài toán theo sáu chương. Các bài toán được đánh số theo từng mục trong mỗi chương. Phần thứ hai trình bày lời giải cho một số bài khó, hoặc hướng dẫn, hoặc trả lời cho một số bài đơn giản hơn.

Mức độ khó ở các bài toán là khác nhau, phù hợp với nhiều loại đối tượng. Tuy nhiên, sự đa dạng của các bài toán là có ích cho người đọc. Chúng ta sẽ nắm vững được lý thuyết và hiểu sâu nội dung môn học chỉ sau khi độc lập làm việc với một số lượng lớn các bài tập này.

Bạn đọc phải tự mình hoàn thiện các kỹ năng cũng như phát triển tư duy qua việc giải các bài tập này và có thể đối chiếu lời giải của mình với lời giải hoặc đáp số ở phần hai của cuốn sách.

Một số lời giải được trình bày cô đọng, bạn đọc nên làm rõ hơn, chi tiết hơn cho những lời giải này, cũng như nên tự mình thực hành một cách sáng tạo bằng cách đưa ra những cách lập luận mới.

Những bài toán của cuốn sách đã được tuyển chọn qua thực tế giảng dạy của tác giả cũng như của nhiều bạn đồng nghiệp. Nhiều lời giải thú vị đã được đề xuất từ các bạn sinh viên của chúng tôi. Chúng tôi hy vọng đây là một tài liệu có ích về đại số cho sinh viên không chỉ ở hệ Đại học mà cả ở hệ Cao đẳng Sư phạm.

Cuốn sách không thể tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Thư góp ý xin gửi về Công ty Cổ phần Sách Đại học – Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Phần thứ nhất

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CÁC BÀI TOÁN

Chương I

CƠ SỞ

1. Tập hợp

Khái niệm tập hợp là một trong những khái niệm cơ bản nhất của toán học. Các đối tượng của một tập hợp đã cho nào đó được gọi là các *phần tử* của tập hợp đó. Để ký hiệu phần tử *a thuộc* tập hợp A ta viết $a \in A$; còn nếu phần tử *a không thuộc* tập hợp A ta viết $a \notin A$.

Một tập hợp thường được cho bởi một tính chất nào đó, xác định các phần tử của tập hợp đó. Chẳng hạn, nếu $p(x)$ là tính chất đặc trưng cho các phần tử $x \in A$ thì ta viết

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

và hiểu A là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử x có tính chất $p(x)$.

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là *tập rỗng*, và ký hiệu bởi $\emptyset$. Ví dụ, tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập hợp rỗng.

Tập hợp B được gọi là *tập con* của tập hợp A nếu mọi phần tử thuộc B đều thuộc A, và ký hiệu bởi $B \subset A$ hay $A \supset B$. Như vậy

$$(B \subset A) \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Khi đó, ta cũng nói rằng *B chứa trong A* hay *A chứa B* hay *B bao hàm trong A*. Hai tập hợp A, B được gọi là *bằng nhau* nếu và chỉ nếu chúng có cùng các phần tử. Rõ ràng

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

Nếu $A \subset B$ và $A \neq B$ thì A được gọi là tập con *thực sự* của B.

Trên các tập hợp ta thường xét một số phép toán sau:

Giao của hai tập hợp A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc cả A lẫn B,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Khi $A \cap B = \emptyset$ ta nói rằng A và B *không giao nhau*, hay *rời nhau.*

Hợp của hai tập hợp A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập hợp A, B,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Hiệu của hai tập hợp A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A mà không thuộc B,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Trong trường hợp A là tập con của một tập hợp M thì hiệu $M \setminus A$ được gọi là *phần bù* của A trong M và ký hiệu bởi $C_M A$, hay $\bar{A}$ nếu như ta biết rõ A là tập con của tập hợp nào.

Các phép toán tập hợp liên hệ với nhau bởi một số hệ thức cơ bản:

1. Giả sử A, B là những tập hợp con tuỳ ý của tập hợp M. Khi đó các điều sau là tương đương:

a) $A \subset B$	*d*) $\overline{B} \subset \overline{A}$
b) $A \cap B = A$	*e*) $A \cap \overline{B} = \emptyset$
c) $A \cup B = B$	*f*) $M = \overline{A} \cup B$.

2. Giả sử A, B, C, M là những tập hợp tuỳ ý. Khi đó:

a) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (*luật giao hoán*).

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*luật kết hợp*).

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*luật phân phối*).

d) *Công thức Đờ Moocgăng*

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B);$$
$$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

2. Ánh xạ

Cho X và Y là những tập hợp. Một *ánh xạ* (hay một *hàm*) f từ X tới Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất xác định $y \in Y$, ký hiệu bởi $y = f(x)$. Một ánh xạ thường được viết

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Tập X được gọi là *tập nguồn* hay *miền xác định*, tập Y được gọi là *tập đích* hay *miền giá trị* của ánh xạ f. Phần tử $y = f(x)$ gọi là *ảnh* của x, còn x gọi là *tạo ảnh* của y.

Hai ánh xạ $f, g : X \to Y$ được gọi là *bằng nhau* nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó với mọi tập con A của X, với mọi tập con B của Y, các tập hợp

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

theo thứ tự được gọi là *ảnh* của A qua f, *tạo ảnh toàn phần* của B qua f. Đặc biệt, ảnh $f(X)$ của X qua f được gọi là *ảnh* của f và ký hiệu bởi $\mathrm{Im}f$, $f(X) = \mathrm{Im}f$.

Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *đơn ánh* nếu

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

với mọi $x, x' \in X$. Ta còn nói f là ánh xạ 1-1 từ X *vào* Y. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *toàn ánh* nếu với mỗi y thuộc Y đều tồn tại x thuộc X sao cho $f(x) = y$. Ta cũng nói rằng f là một ánh xạ từ X *lên* Y. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *song ánh* nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh. Khi đó ta còn nói f là một ánh xạ 1-1 *lên*. Hiển nhiên f là song ánh khi và chỉ khi với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Hợp thành (hay *tích*) của các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là ánh xạ $h : X \to Z$ biến x thành $g(f(x))$, ký hiệu bởi $g \circ f$, hoặc đơn giản là gf. Như vậy

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \ \forall x \in X.$$