UỆ - LÊ MẬU HẢI - PHẠM HOÀNG HIỆP

MỞ ĐẦU VỀ GIẢI TÍCH PHỨC TRONG KHÔNG GIAN BANACH

SP

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHUÊ – GS. TSKH. LÊ MẬU HẢI
PGS. TS. PHẠM HOÀNG HIỆP

MỞ ĐẦU VỀ GIẢI TÍCH PHỨC TRONG KHÔNG GIAN BANACH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Mã số: 01.01.332/1001 - ĐH 2013

Mục lục

Trang

Lời nói đầu

Giáo trình được biên soạn dựa trên một số sách chuyên khảo về Giải tích phức hữu hạn và vô hạn chiều, trong đó cuốn "Complex Analysis on Banach spaces" của J.Mujica[5] đóng vai trò cốt lõi.

Giáo trình có 6 chương. Hai chương đầu trình bày các khái niệm cơ bản: đa thức, chuỗi lũy thừa, ánh xạ chỉnh hình và G - chỉnh hình. Chương 3 chủ yếu trình bày về hàm đa điều hòa dưới, một lớp hàm quan trọng luôn gắn liền với hàm chỉnh hình. Một áp dụng của Bổ đề Hartogs về dãy các hàm đa điều hòa dưới cũng được đưa ra. Đó là định lí sâu sắc của Hartogs về tính chỉnh hình của ánh xạ chỉnh hình theo từng biến. Để mở rộng định lí này tới trường hợp Banach, định lí Zorn về tính chỉnh hình của hàm G - chỉnh hình bị chặn địa phương tại ít nhất một điểm cũng được đề cập tới. Chương 5 trình bày 4 loại miền quan trọng của Giải tích phức. Đó là miền tồn tại, miền chỉnh hình, miền lồi chỉnh hình và miền giả lồi. Mối liên hệ giữa 4 loại miền này luôn là một trong các vấn đề trung tâm của Giải tích phức. Trường hợp trong $\mathbb{C}^n$ hay tổng quát hơn trong không gian Banach có cơ sở Schauder, sự tương đương của 3 loại miền đầu tiên được chứng minh dựa trên định lí Cartan - Thullen. Trong khi đó sự tương đương của 3 loại miền đó với miền giả lồi ngay cả trong $\mathbb{C}^n$ cũng chỉ được giải quyết sau công trình lớn của Hörmander về $\overline{\partial}$ - phương trình. Đây là một loại phương trình đặc biệt trong Giải tích phức. Việc giải phương trình này trên đa diện đa thức được đưa ra ở chương 4. Một trong các ứng dụng của nó là Định lí Oka - Weil về xấp xỉ hàm chỉnh hình bởi đa thức được trình bày ở cuối chương này. Cuối cùng, chương 6 nói đến giải phương trình $\overline{\partial}$ trong miền giả lồi và vấn đề Levi về sự tương đương của 4 loại miền trên trong lớp không gian Banach có cơ sở Schauder.

Giáo trình được chúng tôi biên soạn sau nhiều năm giảng dạy môn học này cho các học viên Cao học chuyên ngành Toán Giải tích tại khoa Toán - Tin Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Tuy nhiên trong quá trình biên soạn việc sai sót là không thể tránh khỏi. Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của quý đọc giả.

Các tác giả

Chương 1

Đa thức và chuỗi lũy thừa

1.1. Ánh xạ đa tuyến tính

Trong mục này, chúng ta sẽ trình bày khái niệm ánh xạ đa tuyến tính cùng một số kết quả ban đầu của nó. Trước hết ta đưa ra một số kí hiệu sau.

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hay trường số phức $\mathbb{C}$ và $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ lần lượt là tập các số nguyên dương và số nguyên không âm. Các chữ $E, F, \ldots$ dùng để chỉ các không gian Banach. Nếu E là không gian Banach và với $m \geq 1$, không gian tích $E^m = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{m}$ là không gian Banach với chuẩn cho bởi

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|, \ x_j \in E, \ 1 \leq j \leq m.$$

1.1.1 Định nghĩa. Giả sử E, F là các không gian Banach còn $m \in \mathbb{N}$. Ánh xạ $A : E^m \to F$ gọi là m - *tuyến tính* nếu nó tuyến tính theo từng biến. Nghĩa là với mọi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E^m$ và mọi $1 \leq j \leq m$, các ánh xạ

$$E_j \ni x_j \longmapsto A(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_m)$$

là tuyến tính.

Kí hiệu $\mathcal{L}_a(^mE, F)$ và $\mathcal{L}(^mE, F)$ lần lượt là không gian vectơ các ánh xạ m - tuyến tính và m - tuyến tính liên tục từ E^m vào F tương ứng. Với $A \in \mathcal{L}_a(^mE, F)$, xác định

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\| : \ x_j \in E, \ \|x_j\| \leq 1, \ 1 \leq j \leq m\},$$

và gọi là chuẩn (suy rộng) của A.

Khi $m = 1$, ta viết $\mathcal{L}_a(^1E, F) = \mathcal{L}_a(E, F)$ và $\mathcal{L}(^1E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. Khi $F = \mathbb{K}$ viết $\mathcal{L}_a(^mE, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_a(^mE)$ và $\mathcal{L}(^mE, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE)$. Cuối cùng khi $m = 1$, sẽ viết như thông thường $\mathcal{L}_a(E) = E^\sharp$, $\mathcal{L}(E) = E^*$.

1.1.2 Mệnh đề. *Đối với $A \in \mathcal{L}_a({}^m E, F)$ các điều kiện sau là tương đương:*

a) A liên tục.

b) A liên tục tại $0 \in E^m$.

c) $\|A\| < +\infty$.

Chứng minh. $a) \Rightarrow b)$ là hiển nhiên.

$b) \Rightarrow c)$: Giả sử có giả thiết b) nhưng c) không xảy ra. Vậy tồn tại dãy $(x_1^k, \ldots, x_m^k) \subset E^m$ sao cho

$$\max_j \|x_j^k\| \leq 1$$

nhưng

$$\|A(x_1^k, \ldots, x_m^k)\| \geq k^m$$

đối với mọi $k \geq 1$. Suy ra

$$\max_j \left\| \frac{x_j^k}{k} \right\| \leq \frac{1}{k}$$

và

$$\left\| A\left(\frac{x_1^k}{k}, \ldots, \frac{x_m^k}{k}\right) \right\| \geq 1$$

với mọi k, ta gặp mâu thuẫn.

$c) \Rightarrow a)$: Giả sử $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E^m$ và $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$. Chọn $c > 0$ sao cho $\max_j \|a_j\| \leq c$ và $\max_j \|x_j\| \leq c$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\|A(x_1, \ldots, x_m) - A(a_1, \ldots, a_m)\| \\
&= \Big\| \sum_{j=1}^{m} \Big[A(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, \cdots, x_m) - A(a_1, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)\Big] \Big\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \|A(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, \ldots, x_m) - A(a_1, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \|A\| c^{m-1} \|x_j - a_j\| \to 0 \text{ khi } x_j \to a_j, \ 1 \leq j \leq m.
\end{aligned}$$

Vậy $c) \Rightarrow a)$ là đúng. □

1.1.3 Mệnh đề. *$\mathcal{L}({}^m E, F)$ là không gian Banach với chuẩn $A \longmapsto \|A\|$.*

Chứng minh. Dễ thấy rằng ánh xạ $A \longmapsto \|A\|$ là một chuẩn trên $\mathcal{L}({}^m E, F)$. Giả sử $\{A_j\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathcal{L}({}^m E, F)$. Khi đó, với mọi $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ ta có

$$\|A_j(x_1, \ldots, x_m) - A_k(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \|A_j - A_k\| \|x_1\| \ldots \|x_m\|. \tag{1.1}$$

Suy ra dãy $\{A_j(x_1, \dots, x_m)\} \subset F$ là dãy Cauchy. Vì F là không gian Banach nên tồn tại

$$A(x_1, \dots, x_m) = \lim_j A_j(x_1, \dots, x_m). \tag{1.2}$$

Dễ thấy ánh xạ $A : E^m \to F$ là m - tuyến tính. Ngoài ra do $\{A_j\}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{L}(^m E, F)$ nên tồn tại c sao cho $\|A_j\| \leq c$ với mọi $j \geq 1$. Khi đó từ (1.2) suy ra $\|A\| \leq c$. Cuối cùng từ (1.1) ta có $\|A_j - A\| \to 0$ khi $j \to +\infty$. □

1.1.4 Mệnh đề. *Tồn tại đẳng cấu chính tắc giữa không gian vectơ* $\mathcal{L}_a(^{m+n}E, F)$ *và* $\mathcal{L}_a(^m E, \mathcal{L}_a(^n E, F))$. *Đẳng cấu này sinh ra đẳng cự giữa* $\mathcal{L}(^{m+n}E, F)$ *và* $\mathcal{L}(^m E, \mathcal{L}(^n E, F))$.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra ánh xạ

$$\mathcal{L}_a(^{m+n}E, F) \ni A \longmapsto \widetilde{A} \in \mathcal{L}_a(^m E, \mathcal{L}_a(^n E, F))$$

xác định bởi

$$\widetilde{A}(x_1, \dots, x_m)(y_1, \dots, y_n) = A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

thỏa mãn các yêu cầu đặt ra. □

Đối với mỗi $m \in \mathbb{N}$, kí hiệu S_m là nhóm đối xứng tất cả các hoán vị của m phần tử. Nếu $\sigma \in S_m$ thì $(-1)^\sigma$ kí hiệu dấu của hoán vị σ.

1.1.5 Định nghĩa. Đối với mỗi $m \in \mathbb{N}$, kí hiệu $\mathcal{L}^s_a(^m E, F)$ là không gian vectơ con của $\mathcal{L}_a(^m E, F)$ gồm các ánh xạ m - *tuyến tính đối xứng*, nghĩa là

$$A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \dots, x_m)$$

với mọi $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ và mọi $\sigma \in S_m$.

Tương tự ta kí hiệu $\mathcal{L}^a_a(^m E, F)$ là không gian vectơ con của $\mathcal{L}_a(^m E, F)$ gồm các ánh xạ m - tuyến tính thay phiên hay phản đối xứng, nghĩa là

$$A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)} = (-1)^\sigma A(x_1, \dots, x_m)$$

với mọi $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ và mọi $\sigma \in S_m$.
Các không gian $\mathcal{L}^s(^m E, F)$ và $\mathcal{L}^a(^m E, F)$ được xác định tương tự. Đó là

$$\mathcal{L}^s(^m E, F) = \mathcal{L}^s_a(^m E, F) \cap \mathcal{L}(^m E, F)$$

và

$$\mathcal{L}^a(^m E, F) = \mathcal{L}^a_a(^m E, F) \cap \mathcal{L}(^m E, F).$$

Trường hợp $F = \mathbb{K}$ ta viết $\mathcal{L}^s_a(^m E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^s_a(^m E)$ và $\mathcal{L}^a_a(^m E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^a_a(^m E)$.

1.1.6 Mệnh đề. *Đối với mỗi $A \in \mathcal{L}_a(^m E, F)$ giả sử A^s và A^a xác định bởi*

$$A^s(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

và

$$A^a(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

Khi đó

a. Ánh xạ $A \longmapsto A^s$ là một phép chiếu từ $\mathcal{L}_a(^m E, F)$ lên $\mathcal{L}_a^s(^m E, F)$ với $\|A^s\| \leq \|A\|$ xảy ra cho mọi $A \in \mathcal{L}_a(^m E, F)$. Ánh xạ này cảm sinh một phép chiếu liên tục từ $\mathcal{L}(^m E, F)$ lên $\mathcal{L}^s(^m E, F)$.

b. Ánh xạ $A \longmapsto A^a$ là một phép chiếu từ $\mathcal{L}_a(^m E, F)$ lên $\mathcal{L}_a^a(^m E, F)$ với $\|A^a\| \leq \|A\|$ xảy ra cho mọi $A \in \mathcal{L}_a(^m E, F)$. Ánh xạ này cảm sinh một phép chiếu liên tục từ $\mathcal{L}(^m E, F)$ lên $\mathcal{L}^a(^m E, F)$.

Chứng minh mệnh đề này dành cho độc giả.

Để rõ ràng, ta đặt (đối với $m = 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a(^0 E, F) &= \mathcal{L}_a^s(^0 E, F) = \mathcal{L}_a^a(^0 E, F) \\ &= \mathcal{L}(^0 E, F) = \mathcal{L}^s(^0 E, F) = \mathcal{L}^a(^0 E, F) = F.\end{aligned}$$

Đối với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, ta đặt:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

1.1.7 Định nghĩa. Giả sử $A \in \mathcal{L}_a(^m E, F)$. Khi đó với mỗi $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ và với mỗi $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ với $|\alpha| = m$ ta xác định

$$A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n}) \text{ nếu } m \geq 1$$

và

$$A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = A \text{ nếu } m = 0.$$

1.1.8 Định lí. *Giả sử $A \in \mathcal{L}_a^s(^m E, F)$. Khi đó đối với mọi $x_1, \ldots, x_n \in E$ ta có công thức Leibniz*

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^n = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} A x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$