

**Hoàng Thắng Lợi**

**SỨC BỀN VẬT LIỆU**  
**TẬP II**

## Chương 7

### THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

Các dạng chịu lực được nghiên cứu trong các chương trước: léo, nén đúng tâm uốn, xoắn thuần túy và uốn ngang phẳng chỉ là những trường hợp chịu lực đơn giản.

Trong thực tế thường gặp các thanh chịu lực dưới những hình thức kết hợp của các trường hợp đơn giản. Được gọi là sự chịu lực phức tạp (trên mọi mặt cắt ngang của thanh đồng thời xuất hiện nhiều thành phần nội lực).

Ta thường gặp các dạng:

+Uốn xiên ( $M_x, M_y$ )

+Uốn + kéo, nén ( $N_z, M_x, M_y$ )

+Uốn + xoắn ( $M_u, M_z$ )

+Chịu lực tổng quát.

Giải quyết các bài toán này ta phải sử dụng nguyên lý độc lập cộng tác dụng.

Nội dung nguyên lý:

Nêu trên một thanh đồng thời chịu tác dụng của nhiều lực thì nội lực hay ứng suất trong thanh là tổng nội lực hay ứng suất gây ra do tác dụng của riêng từng lực.

Để áp dụng nguyên lý này bài toán phải thoả mãn hai điều kiện:

- Vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, tương quan giữa biến dạng và chuyển vị là bậc 1.

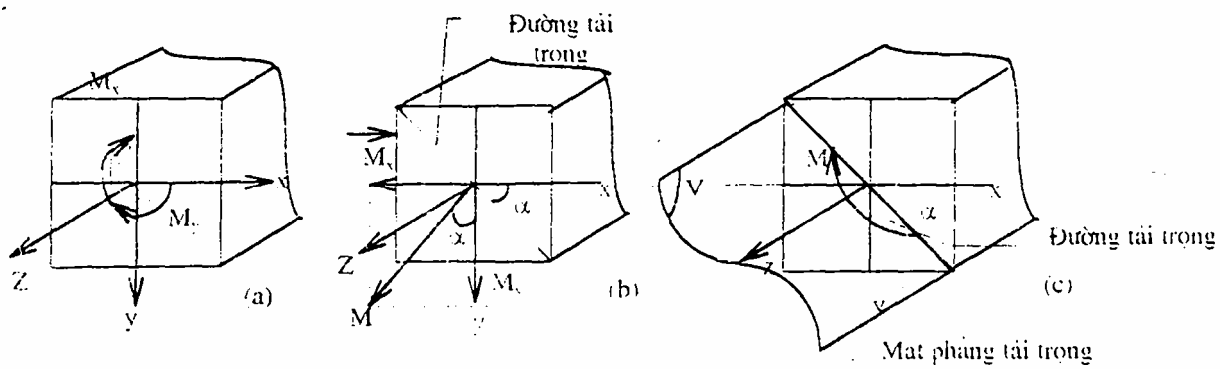
- Biến dạng của thanh là bé, sự dịch chuyển điểm đặt là không đáng kể. Các bài toán phức tạp bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

#### A. THANH CHỊU UỐN XIÊN

##### 1. Định nghĩa:

một thanh chịu uốn xiên là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó có hai thành phần nội lực là mô men uốn  $M_x, M_y$  nằm trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của mặt cắt ta).

Chúng ta có thể biểu diễn các mô men uốn đó bằng các mô men vector:  $\vec{M}_x, \vec{M}_y$ , hợp các vector này sẽ được vector tổng vì (hình 7-16). Hợp  $M_x, M_y$  ta có mômen tổng  $M$  nằm trong mặt phẳng  $V$  (hình 7-1c) chứa trục  $Z$  mà không trùng mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào của mặt cắt. Mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng tải trọng, sao mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang gọi là đường tải trọng.



Như vậy ta có định nghĩa khác về uốn xiên như sau:

Thanh chịu uốn xiên là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần mômen uốn  $M_u$  nằm trong mặt phẳng chứa trục z nhưng không trùng với mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào.

Định nghĩa này giúp ta giải thích các thanh mặt cắt ngang hình tròn hoặc các đa giác nội tiếp trong đường tròn không chịu uốn xiên (5).

## 2- Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang:

Nếu gọi góc  $\alpha$  là góc hợp bởi trục x và đường tải trọng. Nếu biểu diễn mômen uốn  $M_x, M_y$  là vectơ mômen thì ta có:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \sin \alpha \\ M_y &= M \cos \alpha \end{aligned} \right\} (4)$$

Do vậy hệ số góc của đường tải trọng:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_x}{M_y} \quad (7-1)$$

Dấu của các mômen uốn  $M_x, M_y$  quy ước như trường hợp thanh chịu uốn phẳng nghĩa là:  $M_x, M_y$  coi là dương nếu nó làm căng các thớ ở phía dương của trục x và y.

Theo nguyên lý độc lập tác dụng thì ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang bằng tổng ứng suất do riêng  $M_x$  gây ra (coi như không có  $M_y$ ) và ứng suất pháp do riêng  $M_y$  (coi như không có  $M_x$ ) gây ra như vậy ta đã đưa bài toán về hai trường hợp thanh chịu uốn thuần túy. Do vậy công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ có tọa độ x, y trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn xiên là:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad (7.2a)$$

Trong thực tế tính toán để tránh phiền phức do phải để ý đến dấu của tọa độ  $x$ ,  $y$  và  $M_x$ ,  $M_y$ . Người ta thường dùng công thức kỹ thuật sau:

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} \cdot |x| \quad (7.2b)$$

Trong đó các giá trị đều lấy giá trị tuyệt đối còn lấy dấu cộng hay trừ phụ thuộc vào mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

Ví dụ 1: Một dầm bằng gỗ dài 2m, mặt cắt ngang hình chữ nhật (12cm  $\times$  20cm). Dầm bị ngàm một đầu, một đầu tự do chịu lực tập trung  $P = 2,4\text{kN}$  lực  $P$  đặt vuông góc trục dầm và xiên góc  $\varphi = 30^\circ$  xác định vị trí đường tải trọng và ứng suất tại A, B, C, D.

Giải:

Phân lực  $P$  làm hai thành phần  $P_x$ ,  $P_y$ :

$$P_x = P \sin \varphi = 2,4 \cdot 0,5 = 1,2 \text{ kN}$$

$$P_y = P \cos \varphi = 2,4 \cdot 0,866 = 2,08 \text{ kN}$$

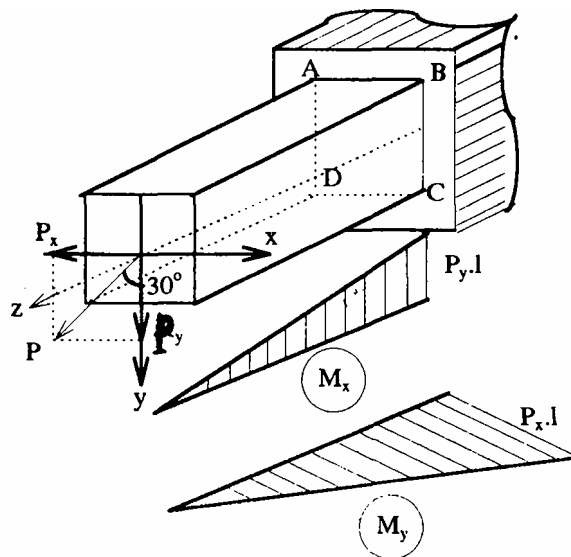
Trong đó mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  biểu diễn như hình vẽ.

Chiều của mômen  $M_x$ ,  $M_y$  biểu diễn như hình vẽ.

Vị trí của đường tải trọng:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_x}{M_y} = \frac{-P_y \cdot l}{P_x \cdot l} = \frac{-2,08}{1,2} = -1,732$$

$$\alpha = -60^\circ$$



Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục  $x, y$

$$* J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1220^3}{12} = 8000 \text{ cm}^4$$

$$* J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{1220^3}{12} = 2880 \text{ cm}^4$$

Theo công thức (7.2a) ta có:

+ Ở điểm A:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{-P_y \cdot l}{J_x} \cdot y_A + \frac{P_x \cdot l}{J_y} \cdot x_A = \\ &= \frac{-2,08 \cdot 200}{8000} \cdot (-10) + \frac{1,2 \cdot 200}{2880} \cdot (-6) = 0,82 = \\ &= 0,52 - 0,5 = 0,02 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

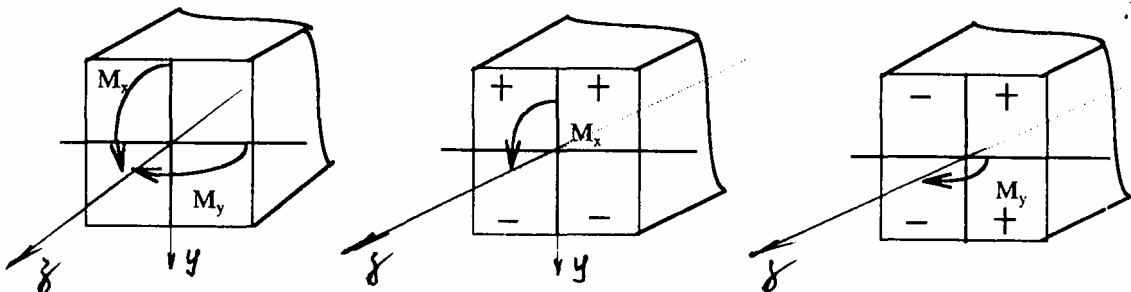
+ Ở điểm B:

$$\sigma_B = + 0,52 + 0,50 = 1,02 \text{ kN/cm}^2$$

$$\vdash \text{ Ở điểm C: } \sigma_C = - 0,52 + 0,5 = - 0,02 \text{ kN/cm}^2$$

$$\vdash \text{ Ở điểm D: } \sigma_D = - 0,52 - 0,52 = - 1,02 \text{ kN/cm}^2$$

Nếu dùng công thức kỹ thuật ta phải xét dấu của các mômen uốn  $M_x, M_y$ .



Tính theo công thức (7.2b) thì:

$$\sigma_A = + \frac{416}{8000} \cdot 10 - \frac{240}{2800} \cdot 6 = 0,02 \text{ kN/cm}^2$$

### 3- Điều kiện bền dầm chịu uốn xiên.

Để thiết lập điều kiện bền trước hết phải tìm điểm nguy hiểm (nằm trong mặt cắt ngang nguy hiểm) và tính ứng suất tại những điểm nguy hiểm đó. Muốn vậy ta phải dựa vào biểu đồ  $M_x, M_y$ , nhưng nhiều khi việc tìm mặt cắt ngang nguy hiểm không dễ dàng vì  $M_x$  và  $M_y$  không cùng đạt giá trị cực trị vì vậy phải xác định ( $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ ) trên mỗi mặt cắt so sánh để tìm ứng suất cực trị.

Những điểm có ứng suất cực trị là những điểm cách xa đường trung hoà nhất.

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y^{\max}_k| + \frac{|M_y|}{J_y} \cdot |x^{\max}_k| \\ \sigma_{\min} &= - \left[ \frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y^{\max}_n| + \frac{|M_y|}{J_y} \cdot |x^{\max}_n| \right]\end{aligned}\quad (7.4)$$

Trong đó: -  $x_k, y_k$  toạ độ điểm chịu kéo cách xa đường trung tâm  
-  $x_n, y_n$  toạ độ điểm chịu nén cách xa đường trung tâm.

Trạng thái ứng suất ở những điểm này là trạng thái ứng suất đơn.

Đối thanh vật liệu dòn vì

$$[\sigma_k] < [\sigma_n]$$

$$\text{nên: } \sigma_{\max} \leq [\sigma]_k \quad (7-5a)$$

$$|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \quad (7-5b)$$

Với thanh vật liệu dẻo vì  $[\sigma_k] \approx [\sigma]_n$  vậy

$$\max|\sigma| \leq [\sigma]_k \quad (7-6)$$

Nếu hai trục quán tính chính trung tâm là đối xứng thì:

$$|x^{\max}_k| = |x^{\max}_n| ; \quad |y^{\max}_k| = |y^{\max}_n|$$

$$\text{Vậy } \sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$$

Trường hợp đặc biệt: thanh có tiết diện chữ nhật chữ I hay chữ C ghép thì:

()

$$\begin{aligned}|x_k| &= |x_n| = x_{\max} \\ |y_k| &= |y_n| = y_{\max}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

$$\text{Trong đó: } W_x = \frac{J_x}{|y_{\max}|} ; \quad W_y = \frac{J_y}{|x_{\max}|}$$

Với trường hợp này điều kiện bền:

- Nếu thanh vật liệu dòn:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_k \quad (7.7)$$

- Nếu thanh là vật liệu dẻo:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \quad (7.8)$$

Qua điều kiện bền ta có ba bài toán cơ bản:

- Kiểm tra bền;
- Chọn tải trọng cho phép;
- Chọn kích thước.

Riêng bài toán chọn kích thước có nhiều đại lượng chưa biết:

$J_x, J_y, X_n, X_s, Y_n, Y_s,$

Vậy ta biến đổi công thức kiểm tra:

$$\frac{1}{W_x} \left( M_x + \frac{W_x}{W_y} M_y \right) \leq [\sigma]$$

Chọn trước  $\frac{W_x}{W_y}$  - với hình chữ nhật  $\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b}$

- □ chọn  $5 \div 7$

- I chọn  $8 \div 10$

Ví dụ 2:

Cho một thanh thép mặt cắt chữ I, chọn số hiệu N<sub>01</sub> biết vật liệu có

$$[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2 \text{ và } P = 11 \text{ kN.}$$

Giải: Phân P làm hai thành phần  $P_x$  và  $P_y$ .

Tại máy cắt ngàm ta có:

$$M_x = -P_y \cdot l = -11 \cos 20^\circ \cdot 1,2$$

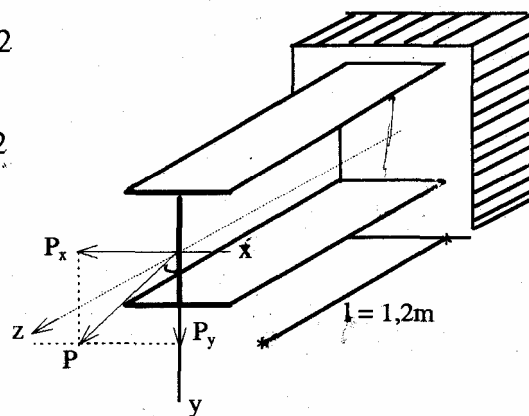
$$= -12,4 \text{ kNm.}$$

$$M_y = -P_x \cdot l = -11 \sin 20^\circ \cdot 1,2$$

$$= -4,51 \text{ kNm.}$$

Tra bảng chọn  $\frac{W_x}{W_y} = 10$

Vậy theo điều kiện bền:



$$W_x = \frac{1}{[\sigma]} \left[ |M_x| + \frac{w_x}{w_y} \cdot |M_y| \right] = \frac{1}{16} [12,4 \cdot 10^2 + 10 \cdot 4,51 \cdot 10^2]$$

$$= 360 \text{ cm}^3$$

Dựa vào kết quả này chọn I N 27 tra bảng có:  $W_x = 371 \text{ cm}^3$ ,  $W_y = 41,5 \text{ cm}^3$  thử lại điều kiện bền.

$$\sigma_{\max} = \frac{12,4 \cdot 10^2}{371} + \frac{4,51 \cdot 10^2}{41,5} = 14,2 \text{ kN/cm}^3 < [\sigma] = 16$$

So sánh thấy  $\sigma_{\max}$  nhỏ hơn nhiều so với  $[\sigma]$  vậy chọn I số 24a có:  $W_x = 317 \text{ cm}^3$ ;  $W_y = 41,6 \text{ cm}^3$ .

Khi đó:

$$\sigma_{\max} = \frac{12,4 \cdot 10^2}{317} + \frac{4,51 \cdot 10^2}{41,6} = 14,7 \text{ kN/cm}^3$$

vậy chọn I 24a.

#### 4- Độ võng của dầm chịu uốn xiên.

Gọi  $f_x$ ,  $f_y$  là độ võng theo phương của các trục quán tính chính trung tâm, x, y do  $M_x$ ,  $M_y$  gây ra thì độ võng toàn phần bằng tổng hình học của các độ võng  $f_x$ ,  $f_y$  giá trị của nó.

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Trong đó: -  $f_x$ ,  $f_y$  được xác định giống chương uốn ngang phẳng thanh thẳng.

#### 5- Đối với thanh có mặt cắt ngang hình tròn.

Với mặt cắt ngang hình tròn vì trục nào đi qua tâm cũng là trục quán tính chính trung tâm vì vậy thanh không chịu uốn xiên:

$$\text{Vậy: } \sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} = + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u}$$

$$\sigma_{\min} = - \frac{M_u}{W_u} = - \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u}$$

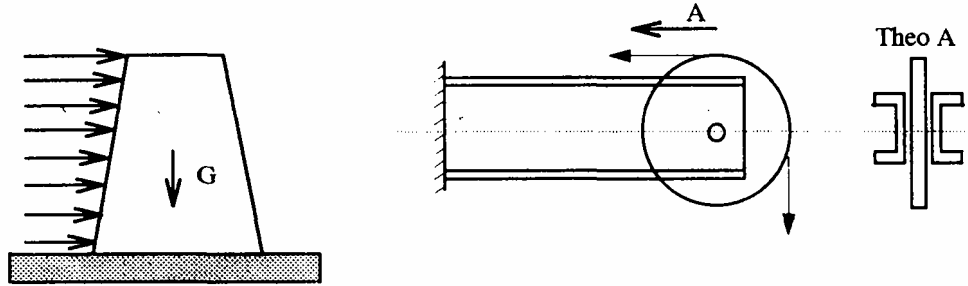
$$\text{Trong đó: } W_x = W_y = W_u$$



## B. THANH CHỊU UỐN ĐỒNG THỜI KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

### 1. Định nghĩa.

Thanh chịu uốn + kéo nén đồng thời là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là các mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  và lực dọc  $N_z$ .



### 2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

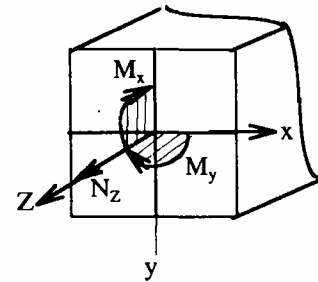
Giả sử trên mặt cắt ngang nào đó của thanh chịu uốn đồng thời với kéo (nén) có các thành phần nội lực  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N_z$ , (hình vẽ).

Theo nguyên lý độc lập tác dụng:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{N_z}{F} \quad (7-9)$$

hay:

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} \cdot |x| \pm \frac{N_z}{F}$$



Chọn dấu tương tự uốn xiên.

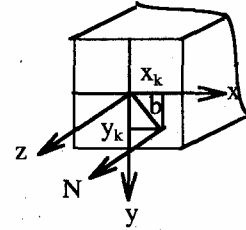
**3- Trường hợp riêng của bài toán uốn + kéo nén đúng tâm là bài toán kéo nén lệch tâm:**

a) Định nghĩa: Một thanh chịu kéo nén lệch tâm khi ngoại lực thu về một lực N không trùng với trục thanh nhưng song song trục thanh.

$$M_x = N \cdot y_k$$

$$M_y = N \cdot x_k$$

Vậy ta có thể hoàn toàn áp dụng được công thức tính toán uốn + kéo nén đồng thời.



$$\sigma = \frac{N \cdot y_k}{J_x} \cdot y + \frac{N \cdot x_k}{J_y} \cdot x + \frac{N}{F}$$

Nếu đặt:  $i_x^2 = \frac{J_x}{F}$  ;  $i_y^2 = \frac{J_y}{F}$  (7.10)

Thì:  $\sigma = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{y_k \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_k \cdot x}{i_y^2} \right)$  (7.11)

Trong đó:  $i_x, i_y$  là bán kính quán tính.

**4- Kiểm tra bền.**

- Vật liệu dẻo:  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$  ;  $|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

- Vật liệu giòn:  $|\sigma_{\max}| \leq [\sigma]_k$

Nếu các thanh dạng mặt cắt là CN, I, □ thì :

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \pm \frac{|N_z|}{F} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \pm \frac{|N_z|}{F} \leq [\sigma]$$