PGS. BÙI THẾ TÂM GS. TRẦN VŨ THIỆU

CÁC PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU HOÁ

DÙNG CHO :

- SINH VIÊN CÁC NGÀNH KHOA HỌC KỸ THUẬT VÀ KINH TẾ
- CÁN BỘ CÁC NGÀNH KỸ THUẬT VÀ KINH TẾ
- HỌC SINH CHUYÊN TIN
- CÁC CHUYÊN GIA LẬP TRÌNH

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Các bài toán tối ưu thường xuất hiện trong kinh tế và kỹ thuật, chúng có nhiều ứng dụng rất rộng rãi và đa dạng. Hiện nay môn học **"Tối ưu hoá"** được giảng dạy ở những năm cuối cho sinh viên các ngành khoa học tự nhiên, khoa học kỹ thuật và kinh tế thuộc nhiều trường Đại học và Cao đẳng. Cuốn sách **"Các phương pháp tối ưu hoá"** là tập hợp các bài giảng của các tác giả về môn học này ở một số trường Đại học trong nhiều năm.

Cuốn sách này gồm bảy chương. Chương 2 và Chương 3 trình bày các thuật toán cơ bản của Qui hoạch tuyến tính và Bài toán vận tải, đây là phần tối thiểu của môn học **"Tối ưu hoá"** thường được giảng dạy trong các trường Đại học hiện nay, vì vậy phần này được trình bày chặt chẽ và có chứng minh đầy đủ. Chương 4 trình bày một số dạng đặc biệt của quy hoạch tuyến tính: quy hoạch với biến bị chặn trên, quy hoạch nhiều mục tiêu, quy hoạch tham số và phân rã của quy hoạch tuyến tính. Chương 5 dành cho các phương pháp của quy hoạch nguyên. Chương 6 đề cập tới các phương pháp tối ưu trên mạng và đồ thị. Chương 7 dành cho các phương pháp quy hoạch phi tuyến.

Các phương pháp tối ưu trình bày trong cuốn sách đã được lựa chọn, chúng là các phương pháp tối ưu tiêu biểu và tính toán có hiệu quả trên máy tính. Mỗi phương pháp được trình bày ý tưởng cơ bản, thuật toán chi tiết, ví dụ giải bằng số và các bài tập, không quá đi sâu chứng minh đầy đủ về mặt toán học, như vậy sẽ phù hợp hơn đối với sinh viên các ngành kỹ thuật và kinh tế. Phần thuật toán chi tiết của các phương pháp cố gắng trình bày để các lập trình viên có thể chuyển dễ dàng sang chương trình bằng Pascal, C, FoxPro, Basic hay Java.

Đối tượng của cuốn sách là các bạn sinh viên, kỹ sư thuộc các ngành khoa học tự nhiên, khoa học kỹ thuật và kinh tế, học sinh các lớp chuyên tin học.

Toàn bộ cuốn sách do chính các tác giả soạn thảo trên Hệ soạn thảo văn bản AMSTEX và đã cố gắng hạn chế đến mức tối thiểu các lỗi về in ấn. Các tác giả rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc trong cả nước về nội dung và hình thức cuốn sách để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn. Trong lần xuất bản sau các tác giả dự định bổ sung thêm các chương: Quy hoạch ngẫu nhiên, Quy hoạch động, Quy hoạch tách biến, Trò chơi.

Các tác giả xin chân thành cảm ơn PTS Nguyễn Xuân Thủy, Giám đốc Nhà Xuất bản Giao thông Vận tải đã động viên, khuyến khích và tạo mọi điều kiện thuận lợi để cuốn sách được hoàn thành nhanh chóng và sớm ra mắt bạn đọc.

Các tác giả

PGS.PTS BÙI THẾ TÂM

Chương 1

MỞ ĐẦU

§1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Các thuật toán tối ưu có rất nhiều ứng dụng trong kinh tế và trong khoa học kỹ thuật. Đối với mỗi một thuật toán, cần phải xây dựng cơ sở lý thuyết của thuật toán, chứng minh tính hữu hạn hay hội tụ của nó, thuật toán cần phải lập trình được và chạy có hiệu quả trên máy tính điện tử.

1.1. Bài toán tối ưu tổng quát

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau. Cực đại hóa (cực tiểu hóa) hàm

$$f(x) \to \max \quad (\min) \tag{1.1}$$

với các điều kiện

$$g_i(x) \quad (\leq, =, \geq) \quad b_i, i = 1, \ldots, m \tag{1.2}$$

$$x \in X \subset R^n \tag{1.3}$$

Bài toán (1.1)-(1.3) được gọi là một quy hoạch, hàm f(x) được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc. Tập hợp

$$D = \{x \in X \mid g_i(x) \quad (\leq, =, \geq) \quad b_i, \ i = 1, \ldots, m\} \tag{1.4}$$

được gọi là miền ràng buộc (hay miền chấp nhận được). Mỗi điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ được gọi là một phương án (hay một lời giải chấp nhận được). Một phương án $x^* \in D$ đạt cực đại (hay cực tiểu) của hàm mục tiêu, cụ thể là

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D \quad \text{(đối với bài toán Max)}$$

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D \quad \text{(đối với bài toán Min)}$$

được gọi là phương án tối ưu (lời giải tối ưu). Khi đó giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

1.2. Phân loại các bài toán

Một trong những phương pháp hiển nhiên nhất để giải bài toán đặt ra là phương pháp duyệt toàn bộ: tìm giá trị hàm mục tiêu f(x) trên tất cả các phương án, sau đó so sánh các giá trị tính được để tìm ra giá trị tối ưu và phương án tối ưu của bài toán. Tuy nhiên cách giải quyết này khó có thể thực hiện được , ngay cả khi kích thước của bài toán không lớn (số biến n và số ràng buộc m) là không lớn, bởi vì tập D thông thường gồm một số rất lớn phần tử, trong nhiều trường hợp còn là không đếm được .

Vì vậy cần phải có những nghiên cứu trước về mặt lý thuyết để có thể tách ra từ bài toán tổng quát những lớp bài toán dễ giải. Các nghiên cứu lý thuyết đó thường là nghiên cứu các tính chất của các thành phần bài toán (hàm mục tiêu, các hàm ràng buộc, các biến số, các hệ số ...), các điều kiện tồn tại lời giải chấp nhận được , các điều kiện cần và đủ của cực trị, tính chất của các đối tượng nghiên cứu.

Các tính chất của các thành phần của bài toán và đối tượng nghiên cứu giúp ta phân loại các bài toán. Một bài toán tối ưu (quy hoạch toán học) được gọi là :

- Quy hoạch tuyến tính (QHTT) nếu hàm mục tiêu f(x) và tất cả các hàm ràng buộc $g_i(x), i = 1, \ldots, m$ là tuyến tính, tập X là một tập lồi đa diện. Một trường hợp riêng quan trọng của quy hoạch tuyến tính là bài toán vận tải;

- Quy hoạch tham số nếu các hệ số trong biểu thức của hàm mục tiêu và của các ràng buộc phụ thuộc vào tham số;

- Quy hoạch động nếu đối tượng xét là các quá trình có nhiều giai đoạn nói chung, hay các quá trình phát triển theo thời gian nói riêng;

- Quy hoạch phi tuyến nếu f(x) hoặc có ít nhất một trong các hàm $g_i(x)$ là phi tuyến, hoặc cả hai trường hợp đó cùng xảy ra;

- Quy hoạch lồi nếu tìm cực tiểu của hàm lồi f(x) trên tập lồi D;

- Quy hoạch lõm nếu tìm cực tiểu của hàm lõm f(x) trên tập lồi D;

- Quy hoạch rời rạc nếu miền ràng buộc D là tập rời rạc. Trong trường hợp riêng khi các biến chỉ nhận giá trị nguyên ta có quy hoạch nguyên. Một trường hợp riêng của quy hoạch nguyên là quy hoạch biến Boole khi các biến số chỉ nhận giá trị 0 hay 1;

- Quy hoạch đa mục tiêu nếu trên cùng một miền ràng buộc ta xét đồng thời các hàm mục tiêu khác nhau.

§2. VẤN ĐỀ MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC

Trong tiết này ta sẽ nói về việc xây dựng mô hình toán học cho một vấn đề thực tế, sau đó giới thiệu một số mô hình thực tế quan trọng.

2.1. Xây dựng mô hình toán học cho một vấn đề thực tế

Việc mô hình hoá toán học cho một vấn đề thực tế có thể chia ra làm bốn bước.

Bước 1. Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề thực tế, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập các quy luật mà chúng phải tuân theo. Nói một cách khác là phát biểu mô hình bằng lời và bằng những biểu đồ, các điều kiện về kinh tế kỹ thuật, tự nhiên, xã hội, các mục tiêu cần đạt được .

Bước 2. Xây dựng mô hình cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình định tính. Khi có một hệ thống, ta chọn các biến số đặc trưng cho các trạng thái của hệ thống. Mô hình toán học thiết lập mối liên hệ giữa các biến số và các hệ số điều khiển hiện tượng. Việc làm rất quan trọng ở bước này là phải xác định hàm mục tiêu, tức là một đặc trưng bằng số mà giá trị càng lớn (càng nhỏ) của nó tương ứng với hiệu quả càng tốt hơn giải quyết vấn đề mà người nhận lời giải mong muốn. Tiếp theo, phải diễn tả bằng các phương trình hay bất phương trình các điều kiện kinh tế kỹ thuật ..., đó là các ràng buộc toán học mà các biến số phải tuân theo.

Bước 3. Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành trong Bước 2. Căn cứ vào mô hình đã xây dựng cần phải chọn hoặc xây dựng phương pháp giải cho phù hợp. Tiếp đó, cụ thể hóa phương pháp bằng các thuật toán tối ưu. Vì các bài toán thực tế thường có kích thước lớn nên không thể giải bằng tay được mà phải sử dụng máy tính điện tử. Vậy cần chương trình hóa thuật toán bằng một ngôn ngữ lập trình thích hợp, sau đó đưa lên máy tính để chạy và in ra kết quả.

Bước 4. Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được trong Bước 3. Trong bước này cần phải xác định mức độ phù hợp của mô hình và kết quả tính toán với vấn đề thực tế hoặc áp dụng phương pháp phân tích chuyên gia. Ở đây có thể xảy ra một trong hai khả năng sau.

• **Khả năng 1.** Mô hình và các kết quả tính toán phù hợp với thực tế. Khi đó cần lập một bảng tổng kết ghi rõ cách đặt vấn đề, mô hình toán học thuật toán tối ưu, chương trình, cách chuẩn bị số liệu để đưa vào máy tính, nghĩa là toàn bộ các công việc cần thiết cho việc áp dụng mô hình và kết quả để giải quyết vấn đề thực tế đặt ra. Trong trường hợp mô hình cần được sử dụng nhiều lần thì phải xây dựng hệ thống phần mềm bảo đảm giao diện thuận tiện giữa người sử dụng và máy tính điện tử, không đòi hỏi người sử dụng phải có trình độ chuyên môn cao về toán.

• **Khả năng 2.** Mô hình và các kết quả tính toán không phù hợp với thực tế. trong trường hợp này cần phải xem xét các nguyên nhân của nó. Có thể nêu ra bốn nguyên nhân sau:

- Các kết quả tính toán trong Bước 3 chưa có đủ độ chính xác cần thiết. Khi đó cần phải xem lại các thuật toán cũng như các chương trình tính toán đã viết và sử dụng.

- Các số liệu ban đầu (các hệ số, thông số) không phản ánh đúng thực tế giá cả, hoặc chi phí trên thị trường, hoặc các định mức vật tư, hoặc các số liệu khác về công suất, khả năng máy móc, dự trữ tài nguyên ... Khi đó cần điều chỉnh lại một cách nghiêm túc, chính xác.

- Mô hình định tính xây dựng chưa phản ánh được đầy đủ hiện tượng thực tế. Nếu vậy cần rà soát lại Bước 1 xem có yếu tố hoặc quy luật nào còn bị bỏ sót không ?

- Việc xây dựng mô hình toán học ở Bước 2 chưa thỏa đáng. Cần phải xây dựng lại cho phù hợp, mức độ tăng dần từ tuyến tính đến phi tuyến, từ tĩnh đến động.

2.2. Một số mô hình thực tế

a) Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu phát biểu như sau. Giả sử một xí nghiệp sản xuất n loại sản phẩm và sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau. Ta đưa vào các ký hiệu sau: x_j là lượng sản phẩm loại j ($j = 1, \ldots, n$) mà xí nghiệp sản xuất, c_j là tiền lãi (hay giá bán) đối với một đơn vị sản phẩm j ($j = 1, \ldots, n$), a_{ij} là suất chi phí tài nguyên loại i để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j, b_i là lượng dự trữ tài nguyên loại i ($i = 1, \ldots, n$). Trong các điều kiện đã cho, hãy xác định các giá trị x_j, $j = 1, \ldots, n$ sao cho tổng tiền lãi (hay tổng giá trị sản lượng hàng hóa) là lớn nhất với số tài nguyên hiện có. Mô hình toán học có dạng bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n$$

b) Bài toán vận tải

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa (đánh số $i = 1, \ldots, m$), lượng hàng hóa ở kho i là a_i, $i = 1, \ldots, m$. Gọi kho i là điểm phát i. Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng trên (đánh số $j = 1, \ldots, n$ với nhu cầu tiêu thụ ở điểm j là b_j, $j = 1, \ldots, n$). Gọi điểm tiêu thụ j là điểm thu j.