PHƯƠNG PHÁP DỰ BÁO-HIỆU CHỈNH DẠNG RKN LẶP SONG SONG LIÊN TỤC CẢI TIẾN CHO BÀI TOÁN KHÔNG CƯƠNG

Nguyễn Văn Minh

Trường Đại học Kinh tế và Quản trị kinh doanh – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi đề xuất lược đồ lặp song song, dự báo hiệu chỉnh với 2 công thức đầu ra liên tục. Bài báo này là sự kế tiếp phương pháp dự báo hiệu chỉnh dạng RKN lặp song song liên tục đã được công bố trong [1]. Sự khác nhau giữa bài báo này với [1] ở chỗ là trong bài báo này nhận được 2 công thức đầu ra liên tục đó là giá trị gần đúng của ẩn hàm và giá trị gần đúng của đạo hàm của ẩn hàm, trong khi [1] chỉ nhận được 1 công thức đầu ra liên tục. Cũng như tất cả các phương pháp số khác, các tính chất cần thiết của phương pháp như tốc độ hội tụ, cấp chính xác, tính ổn định cũng được khảo sát.

Từ khóa: *Phương pháp Runge-Kutta-Nystrom, Phương pháp Dự báo-Hiệu chỉnh, Ổn định, Hội tụ, Lặp song song, vector nấc…*

*PHƯƠNG PHÁP ICRKN

Trong bài báo [1] chúng tôi đã đề xuất thuật toán dạng Runge-Kutta lặp song song liên tục, trong đó công thức đầu ra là giá trị của hàm phải tìm phụ thuộc liên tục vào tham số ξ. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất thuật toán dựa trên thuật toán trong [1], với hai công thức đầu ra, đó là ngoài giá trị gần đúng của hàm phải tìm còn có cả giá trị gần đúng của đạo hàm của hàm phải tìm:

$$\boldsymbol{Y}_{ni} = \mathbf{u}_n + hc_i\mathbf{u}'_n + h^2\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\boldsymbol{f}(t_n + c_j h, \boldsymbol{Y}_{nj}), \quad j = 1...s \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{u}'_n + h^2\sum_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{f}(t_n + c_j h, \boldsymbol{Y}_{nj}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}'_{n+1} = \boldsymbol{u}'_n + h\sum_{j=1}^{s} d_j\boldsymbol{f}(t_n + c_j h, \boldsymbol{Y}_{nj}), \tag{3}$$

Với hai công thức đầu ra liên tục:

$$\boldsymbol{u}_{n+\xi} = \boldsymbol{u}_n + h\xi\boldsymbol{u}'_n + h^2\sum_{j=1}^{s} b_j(\xi)\boldsymbol{f}(t_n + c_j h, \boldsymbol{Y}_{nj}), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}'_{n+1} = \boldsymbol{u}'_n + h\sum_{j=1}^{s} d_j(\xi)\boldsymbol{f}(t_n + c_j h, \boldsymbol{Y}_{nj}), \tag{5}$$

$$0 \le \xi \le 2;\ \boldsymbol{u}_{n+\xi} \approx \boldsymbol{y}(t_n + \xi),\ t_{n+\xi} = t_n + \xi h,\ \boldsymbol{u}_{n+1} \approx \boldsymbol{y}(t_{n+1}),$$
$$\boldsymbol{u}_n \approx \boldsymbol{y}(t_n),\ \boldsymbol{u}'_{n+1} \approx \boldsymbol{y}'(t_{n+1}),\ \boldsymbol{u}'_n \approx \boldsymbol{y}'(t_n),$$

Với h là bước lưới, còn vector $\boldsymbol{Y}_n = (\boldsymbol{Y}_{n1}, \boldsymbol{Y}_{n2}, ..., \boldsymbol{Y}_{ns})^T$ là vector nấc, nó biểu thị xấp xỉ nghiệm chính xác $(\boldsymbol{y}(t_n + c_1 h), ..., \boldsymbol{y}(t_n + c_s h))^T$ tại bước thứ *n*. Ma trận A, vector **b**, vector **d** là các tham số của phương pháp, chúng được xác định từ phương pháp Runge-Kutta-Nystrom. Đặc trưng của phương pháp này là hai công thức đầu ra, nó hoàn toàn được xác định khi các vector $\boldsymbol{b}(\xi), \boldsymbol{d}(\xi)$ được xác định. Bằng phương pháp trùng khớp và thỏa mãn điều kiện liên tục :

$\boldsymbol{b}(0) = \boldsymbol{0}; \boldsymbol{b}(1) = \boldsymbol{b}; \boldsymbol{d}(0) = \boldsymbol{0}; \boldsymbol{d}(1) = \boldsymbol{d}$ ta sẽ xác định được hai vector $\boldsymbol{b}(\xi), \boldsymbol{d}(\xi)$. Toàn bộ phương

* *Nguyễn Văn Minh, Tel: 0912119767,*

Email: nvminh1954@gmail.com

pháp ICRKN được xác định bởi bảng Butcher:

C	A
y_{n+1} y'_{n+1} $y_{n+\xi}$ $y'_{n+\xi}$	$\boldsymbol{b}^T$ $\boldsymbol{d}^T$ $\boldsymbol{b}(\xi)$ $\boldsymbol{d}(\xi)$

XÁC ĐỊNH CÁC THAM SỐ CỦA PHƯƠNG PHÁP ICRKN

Giả sử đã có vector trùng khớp **c**, theo phương pháp RKN ta có ngay:

$$A = PR^{-1}, b^T = g^T R^{-1}, d = \bar{g} S^{-1}$$

Trong đó:

$$P = (p_{ij}) = \frac{c_i^{j+1}}{j+1}, \quad R = (r_{ij}) = (jc_i^{j-1}), \quad S = (s_{ij}) = (c_i^{j-1})$$

$$\boldsymbol{g} = (g_i) = \frac{1}{i+1}, \quad \bar{\boldsymbol{g}} = (\bar{g}_i) = \left(\frac{1}{i}\right), \quad i, j = 1..s$$

Vector $\boldsymbol{b}(\xi)$ đã được xác định trong [1]: $\boldsymbol{b}(\xi) = \boldsymbol{g}^T diag\{\xi^2, \xi^3, ..., \xi^{s+1}\} R^{-1}$.Bây giờ ta chỉ còn xác định vector $\boldsymbol{d}(\xi)$ bằng phương pháp trùng khớp. Công thức đầu ra liên tục (5) được viết lại:

$$y'(t_n+\xi h) = y'(t_n) + h\sum_{j=1}^{s} d_j(\xi) y''(t_n + c_j h), \qquad (6)$$

Khai triển Taylor theo biến *h* tại lân cận điểm t_n các hàm

$$y(t_n + \xi h) = y(t_n) + \xi h y'(t_n) + \sum_{k=2}^{s} \frac{\xi^k h^k}{k!} y^{(k)}(t_n)$$
$$y'(t_n + \xi h) = y'(t_n) + \sum_{k=2}^{s} \frac{\xi^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_n) \qquad (7)$$
$$y''(t_n + c_j h) = \sum_{k=2}^{s+1} \frac{c_j^{\,k-2} h^{k-2}}{(k-2)!} y^{(k)}(t_n)$$

Thay (7) vào (6) ta nhận được:

$$\sum_{k=2}^{s+1} \frac{\xi^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_n) = h\sum_{j=1}^{s} d_j(\xi) \sum_{k=2}^{s+1} \frac{c_j^{\,k-2} h^{k-2}}{(k-2)!} y^{(k)}(t_n)$$

$$\sum_{k=2}^{s+1} \frac{\xi^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_n) = \sum_{k=2}^{s+1} \left(\sum_{j=1}^{s} d_j(\xi) c_j^{\,k-2} \right) \frac{h^{k-1}}{(k-2)!} y^{(k)}(t_n)$$

$$\sum_{k=2}^{s+1} \left[\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)} - \sum_{j=1}^{s} d_j(\xi) c_j^{k-2} \right] \frac{1}{(k-2)!} h^{k-1} y^{(k)}(t_n) = 0$$

Đồng nhất theo *h*, ta được:

$$\frac{\xi^{k-1}}{k-1} - \sum_{j=1}^{s+1} d_j(\xi) c_j^{k-2} = 0$$

hay viết dưới dạng vector

$$\frac{\xi^{k+1}}{k+1} - \boldsymbol{d}(\xi)\boldsymbol{c}^k = 0 \qquad k = 0, ..., s-1 \qquad (8)$$

Điều kiện (8) có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} d_1(\xi) + d_1(\xi) + ... + d_s(\xi) = \dfrac{\xi}{1} \\ d_1(\xi)c_1 + d_2(\xi)c_2 + ... + d_s(\xi)c_s = \dfrac{\xi^2}{2} \\ d_1(\xi)c_1^2 + d_2(\xi)c_2^2 + ... + d_s(\xi)c_s^2 = \dfrac{\xi^3}{3} \\ .... \\ d_1(\xi)c_1^{s-1} + d_2(\xi)c_2^{s-1} + ... + d_s(\xi)c_s^{s-1} = \dfrac{\xi^s}{s} \end{cases} \qquad (9)$$

Điều kiện (8) hoặc (9) cho phép xác định vector $\boldsymbol{d}(\xi)$ một cách duy nhất và tường minh vì với giả thiết $c_i \neq c_j \quad \forall i \neq j$ cho ta ma trận chính của hệ (9) là ma trận Vandermonde không suy biến. Khi điều kiện (9) thỏa mãn, ta có quan hệ cấp chính xác địa phương:

$$\| y'(t_{n+\xi}) - u'_{n+\xi} \| = O(h^{s+1})$$

Ngoài ra theo [1], ta cũng đã có:

$$\| y(t_{n+\xi}) - u_{n+\xi} \| = O(h^{s+2})$$

Chúng ta có định lý sau đây:

Định lý: *Nếu hàm* **f** *là hàm liên tục Lipschitz và nếu phương pháp dự báo RKN (1)-(3) có cấp chính xác nấc p, khi đó các công thức đầu ra liên tục (4)-(5) có cấp chính xác p*=min(p,s+2).*

Việc chứng minh định lý này hoàn toàn như chứng minh định lý 2.1 trong [1].

PHƯƠNG PHÁP ICPIRKN

Trong mục này chúng tôi đề xuất một lược đồ song song liên tục với 2 công thức đầu ra, nhờ đó ta có thể tính được không những giá trị của ẩn hàm mà còn tính được cả giá trị của đạo hàm của ẩn hàm mà không cần tính toán lại hàm vế phải.

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}_{n,i}^{(0)} = \boldsymbol{y}_{n-1} + h(1+c_i)\boldsymbol{y}'_{n-1} + h^2\sum_{j=1}^{s} b_j(1+c_i)\boldsymbol{f}(t_{n-1}+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n-1,j}^{(m)}), \quad i=1\ldots s & (10.a) \\ \boldsymbol{Y}_{n,i}^{(k)} = \boldsymbol{y}_n + hc_i\boldsymbol{y}'_n + h^2\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\boldsymbol{f}(t_{n-1}+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n,j}^{(k-1)}), \quad i=1\ldots s;\, k=1\ldots m & (10.b) \\ \boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{y}_n' + h^2\sum_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{f}(t_n+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n,j}^{(m)}) & (10.c) \\ \boldsymbol{y}'_{n+1} = \boldsymbol{y}'_n + h\sum_{j=1}^{s} d_j\boldsymbol{f}(t_n+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n,j}^{(m)}) & (10.d) \\ \boldsymbol{y}_{n+\xi} = \boldsymbol{y}_n + h\xi\boldsymbol{y}_n' + h^2\sum_{j=1}^{s} b_j(\xi)\boldsymbol{f}(t_n+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n,j}^{(m)}) & (10.e) \\ \boldsymbol{y}'_{n+\xi} = \boldsymbol{y}'_n + h\sum_{j=1}^{s} d_j(\xi)\boldsymbol{f}(t_n+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n,j}^{(m)}) & (10.f) \end{cases}$$

Coi (10.a) là công thức dự báo và (10.b) là công thức hiệu chỉnh, ta nhận thấy phương pháp ICPIRKN là phương pháp dự báo hiệu chỉnh dạng $PE(CE)^mE$. từ các giá trị của $\boldsymbol{f}(t_{n-1}+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n-1,j}^{(m)})$, *j=1…s* tính được từ bước trước. Nếu trong (10.a,b,c,d,e,f) ta bỏ đi (10.f), ta trở về phương pháp CPIRKN đã công bố trong [1].

Chú ý rằng *s* thành phần $\boldsymbol{f}(t_n+c_jh, \boldsymbol{Y}_{n,j}^{(k)})$ $j=1..s$ được tính song song trên *s* bộ xử lý của một siêu máy tính do đó số lần tính toán hàm vế phải của mỗi bộ xử lý bằng *m+1*.

TỐC ĐỘ HỘI TỤ

Tốc độ hội tụ của phương pháp ICPIRKN được xác định nhờ phương trình thử: $y''(t) = \lambda y(t)$, ở đây λ chạy khắp trên phổ của ma trận Jacoby $\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{y}$. Tương tự như trong [1], ta cũng nhận được phương trình sai số lặp:

$$Y_n^{(j)} - \bar{Y}_n = zA[Y_n^{(j-1)} - Y_n], \quad z = \lambda h^2, \qquad j = 1..m$$

Điều kiện mà bước lưới *h* phải thỏa mãn:

$$h^2 < \frac{1}{\rho(\partial f/\partial y)\rho(A)} \qquad (11)$$

Miền hội tụ được xác định bởi điều kiện:

$$|z| < \frac{1}{\rho(A)}, \qquad z = \lambda h^2 \qquad (12)$$

MIỀN ỔN ĐỊNH

Miền ổn định của phương pháp ICPIRKN được xác định tương tự như trong [1], ta thu được công thức truy hồi sau đây:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_n^{(m)} \\ y_{n+1} \\ hy'_{n+1} \\ y_n \\ h'_n \end{pmatrix} = M_m(z) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{n-1}^{(m)} \\ y_n \\ hy'_n \\ y_{n-1} \\ h'_n - 1 \end{pmatrix}$$

ở đây $M_m(z)$ là ma trận có số chiều (s+4)x(s+4) được xác định bởi:

$$M_m(z) = \begin{bmatrix} z^{m+1}A^mB & P_{m-1}(z)e & P_{m-1}(z)c & z^mA^me & A^m(e+c) \\ z^{m+2}b^TA^mB & 1+zb^TP_{m-1}(z)e & 1+zb^TP_{m-1}(z)c & z^{m+1}b^TA^me & z^{m+1}b^TA^m(e+c) \\ z^{m+2}d^TA^mB & zd^TP_{m-1}(z)e & 1+zd^TP_{m-1}(z)c & z^{m+1}d^TA^me & z^{m+1}d^TA^m(e+c) \\ 0^T & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0^T & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó $P_{m-1}(z) = I + zA + \ldots + (zA)^m$, khoảng ổn định được xác định bởi:

$$(-\beta_{stab}(m), 0) = \{z : \rho(M_m(z)) < 1,\ z < 0\}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyen Huu Cong and Nguyen Van Minh (2007), *Continuous parallel-iterated RKNtype PC methods for nonstiff IVPs*, Applied Numerical Mathematics **57**(2007), 1097-1107.

[2]. Nguyen Huu Cong and Nguyen Van Minh (2008), *Improved parallel-iterated pseudo two-step RKN methods for nonstiff problems*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **32** (2008), 263-280.

[3]. Nguyen Huu Cong, K. Strehmel, R. Weiner(1999), *Runge-Kutta-Nystrom-type parallel block predictor-corrector methods*, Adv. Comput. Math. 10, 115-133.

[4]. Nguyen Huu Cong, N.T. Hong Minh (2000), *Parallel block PC methods with RKN-type correctors and Adams-type predictor*, J. Comput. Math. 74, 509-527.

SUMMARY

IMPROVED CONTINUOUS PARALLEL-ITERATED RKN TYPE PC METHODS FOR NONSTIFF IVPS

Nguyen Van Minh*

Economics and Business Administration, Thai Nguyen University

This paper investigates parallel predictor-corrector (PC) iteration schemes based on direct collocation Runge-Kutta-Nystrom (RKN) corrector methods with two continuous output formulasfor solving nonstiff initial-value problems (IVPs) for systems of special second-order differential equations y''(t)=f(t, y(t)). Consequently, the resulting parallel-iterated RKN-type PC methods are provided with continuous output formulas. The continuous numerical approximations are also used for predicting the stage values in the PC iteration processes. In this way, we obtain parallel PC methods with continuous output formulas and high-order predictors.

* *Nguyen Van Minh, Tel: 0912119767, Email: nvminh1954@gmail.com*