ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP CƠ SỞ

XÂY DỰNG NGÂN HÀNG ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM HỌC PHẦN "TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN HILBERT" CHO SINH VIÊN NĂM THỨ TƯ NGÀNH CỬ NHÂN TOÁN

Chủ nhiệm đề tài: TS Nguyễn Thị Thu Thủy
Bộ môn Toán - Tin

Thái nguyên 03/2009

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Mục đích chính của giảng dạy đại học là truyền đạt kiến thức tới sinh viên một cách tốt nhất. Phương pháp giảng dạy hiện đại cần phải tạo điều kiện và hướng cho sinh viên tự học, tự nghiên cứu để họ tự tìm thấy kiến thức cho bản thân. Như thế sinh viên sẽ được học một cách năng động và những gì mà họ tích lũy trong quá trình học tập sẽ không thể quên. Để làm được điều đó việc xác định các yêu cầu, ưu tiên cho bốn thành tố cơ bản của quá trình đào tạo là Mục tiêu, Nội dung, Phương pháp và **Đánh giá** là rất quan trọng đối với giảng viên.

Nhằm:

- Thực hiện chủ trương của nhà trường tiến tới xây dựng bộ đề thi trắc nghiệm cho hầu hết các môn học trong Trường;

- Góp phần đổi mới phương pháp giảng dạy và học tập, nâng cao hiệu quả đào tạo;

- Đưa ra các công cụ đánh giá đa dạng và kết hợp nhiều hình thức khác nhau (trên lớp, ở nhà, vấn đáp, viết, trắc nghiệm, thi nhóm, công trình nghiên cứu có hướng dẫn) ....

chúng tôi thực hiện đề tài nghiên cứu khoa học cấp cơ sở với tiêu đề ***Xây dựng ngân hàng đề thi trắc nghiệm học phần "Toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert" cho sinh viên năm thứ tư ngành cử nhân Toán học.***

Sản phẩm của đề tài bao gồm: báo cáo kết quả đề tài Khoa học và Công nghệ cấp cơ sở năm 2008; phần mềm trộn đề thi trắc nghiệm, đáp án và phiếu chấm thi.

Nội dung của bản báo cáo kết quả đề tài chia làm ba phần: phần thứ nhất là đề cương chi tiết học phần "Toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert"; phần thứ hai là bộ đề gốc, mỗi đề có 10 câu hỏi trắc nghiệm (với nội dung kiến thức trải đều trong toàn bộ chương trình) kèm theo đáp án; phần thứ ba là ví dụ về việc trộn đề thi và đáp án từ bộ đề thi gốc.

Do học phần "Toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert" là môn chuyên ngành của ngành cử nhân Toán học nên việc xây dựng một bộ đề thi trắc nghiệm là tương đối khó, rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Tác giả

Phần thứ nhất

ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT HỌC PHẦN

- Tên học phần: **Toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert**
- Tên tiếng anh: **Linear Operator in Hilbert Spaces**
- Mã số:
- Số tín chỉ: 3
- Tính chất: Bắt buộc
- Các ngành đào tạo: Toán học

1. Vị trí môn học:

- Các học phần tương đương, hay học phần thay thế: Không.
- Các học phần tiên quyết: Đại số đại cương, Giải tích hàm.

2. Mục tiêu học phần:

- Giúp sinh viên nắm vững hơn giải tích cổ điển là bộ môn được học phần lớn ở chương trình toán phổ thông.
- Giúp sinh viên có tầm nhìn bao quát hơn, từ đó nâng cao năng lực độc lập công tác.

3. Mô tả nội dung học phần:

- Không gian Hilbert: Không gian Hilbert, Khai triển trực giao, Không gian liên hợp, Toán tử tuyến tính bị chặn;

- Toán tử compăc (toán tử hoàn toàn liên tục): Toán tử hoàn toàn liên tục, Phương trình với toán tử, Toán tử đẳng cự, Toán tử Unita.

4. Phân bố thời gian:

- Lí thuyết = 45 tiết.
- Thực hành: 0
- Tự học: 8 giờ/tuần x 15 tuần = 120 giờ.

5. Cách đánh giá học phần:

- Điểm thành phần: Hệ số 0,3.
- Điểm thi cuối kì: Hệ số 0,7.
- Hình thức thi: Viết, Vấn đáp hoặc Trắc nghiệm.

6. Nội dung chi tiết theo từng phần:

Tuần	Nội dung giảng dạy	Tài

(3 tiết / tuần)		**liệu**
1	Chương 1: K**hông gian Hilbert** 1.1. Không gian Hilbert 1.1.1. Dạng song tuyến tính đối xứng dương 1.1.2. Không gian Hilbert	[1]
2	1.2. Khai triển trực giao 1.2.1. Hệ trực giao 1.2.2. Phần bù trực giao	[1]
3	1.2.3. Cơ sở của không gian Hilbert 1.2.4. Tổng trực giao	[1]
4	1.3. Không gian liên hợp 1.3.1. Phiếm hàm tuyến tính liên tục 1.3.2. Không gian liên hợp 1.3.3. Sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert	[1]
5	1.4. Toán tử tuyến tính bị chặn 1.4.1. Toán tử liên hợp 1.4.2. Toán tử tự liên hợp 1.4.3. Toán tử dương	[1]
6	1.4.4. Toán tử chiếu 1.4.5. Toán tử đẳng cự và toán tử unita 1.4.6. Toán tử chuẩn tắc	[1]
7	Thảo luận Chương 1 + Kiểm tra	[1]
8	Chương 2: **Toán tử compact** **(Toán tử hoàn toàn liên tục)** 2.1. Toán tử compact 2.1.1. Định nghĩa 2.1.2. Các tính chất	[1]
9	2.2. Phổ của toán tử compact 2.2.1. Phổ của toán tử compact 2.2.2. Toán tử compact tự liên hợp trong không gian Hilbert.	[1]
10	2.2.3. Toán tử compact tùy ý trong không gian Hilbert	[1]
11	2.3. Phương trình tích phân 2.3.1. Toán tử tích phân 2.3.2. Phương trình tích phân với hạch suy biến	[1]
12	2.3.3. Phương trình tích phân với hạch bất kì 2.3.4. Phương pháp xấp xỉ dần, hạch lặp	[1]

13	2.4. Toán tử Hilbert-Smith, toán tử hạch 2.4.1. Toán tử Hilbert-Smith 2.3.2. Toán tử hạch	[1]
14	2.4.3. Toán tử Hilbert-Smith trong $L^2_{[a,b]}$	[1]
15	Thảo luận và kiểm tra và ôn thi hết học phần	[1]

7. Tài liệu học tập:

a/ Giáo trình sử dụng chính:

[1] Hoàng Tụy, *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

b/ Giáo trình tham khảo:

[a] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1978.

[b] Phạm Kỳ Anh, Trần Đức Long, *Giáo trình hàm thực và Giải tích hàm.* NXB Đại học Quốc gia Hà nội, 2001.

[c] Nguyễn Xuân Liêm, *Bài tập giải tích hàm*, NXB Giáo dục, 2000.

[d] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc, 1991.

Phần thứ hai

BỘ ĐỀ GỐC

Đề số 1:

Câu 1: Cho A là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian $L^2_{[a,b]}$ vào trong nó, $K(x,s)$ là một hàm hai biến có bình phương khả tích. Khi đó A là toán tử tích phân Fredholm nếu:

a. $(A\varphi)(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$;

b. $(A\varphi)(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(x)ds$;

c. $(A\varphi)(x)=\int_a^x K(x,s)\varphi(s)dx$;

d. $(A\varphi)(x)=\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $\varphi(x)=x+\int_0^x (s-x)\varphi(s)ds$ là

a. $\varphi(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-....$

b. $\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-....$

c. $\varphi(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+....$

d. $\varphi(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\frac{x^9}{9!}+....$

Câu 3: Cho X là một không gian Hilbert, $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn của X, $\xi_n=(x,e_n)$ là các hệ số Fourier của x đối với e_n. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:

a.

1) $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ;

2) $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \quad (\forall x\in X)$;

3) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \quad (\forall x \in X)$;

4) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \quad (\forall x \in X), (\forall y \in X)$ (η_i là hệ số Fourier của y đối với e_i);

5) Hệ $\{e_n\}$ tuyến tính trù mật trong X.

b.

1) $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ;

2) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \quad (\forall x \in X)$;

3) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad (\forall x \in X)$;

4) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \quad (\forall x \in X), (\forall y \in X)$ (η_i là hệ số Fourier của y đối với e_i);

5) Hệ $\{e_n\}$ tuyến tính trù mật trong X.

c.

1) $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ;

2) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \quad (\forall x \in X)$;

3) $\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \quad (\forall x \in X)$;

4) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \quad (\forall x \in X), (\forall y \in X)$ (η_i là hệ số Fourier của y đối với e_i);

5) Hệ $\{e_n\}$ tuyến tính trù mật trong X.

d.

1) $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ;

2) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \quad (\forall x \in X)$;

3) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \quad (\forall x \in X)$;

4) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \quad (\forall x \in X), (\forall y \in X)$ (η_i là hệ số Fourier của y đối với e_i);

5) Hệ $\{e_n\}$ tuyến tính trù mật trong X.

Câu 4: Cho A là một toán tử từ không gian Hilbert l^2 vào trong nó được xác định bởi $Ax = (0, 0, ..., 0, x_k, x_{k+1}, ...)$, $x = (x_n) \in l^2$, k là số nguyên dương cho trước. Khi đó:

a. $A^* y = (y_1, y_2, y_3 ...)$ với $y = (y_n) \in l^2$;

b. $A^*y = (y_2, y_3, y_4...)$ với $y = (y_n) \in l^2$;

c. $A^*y = (0, 0,..., 0, y_k, y_{k+1},...)$ với $y = (y_n) \in l^2$;

d. $A^*y = (0, 0,..., y_2, y_4,...)$ với $y = (y_n) \in l^2$;

Câu 5: Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy phần tử của hình cầu đóng đơn vị trong không gian Hilbert X thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 1$. Khi đó:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 2$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\| = \frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \frac{1}{2}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\| = 2$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\| = 1$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\| = \frac{1}{2}$

Câu 6: Cho u, v là hai phần tử cố định của không gian Hilbert X, $A: X \to X$ là toán tử xác định bởi

$$Ax = (x,u)v, \quad x \in X .$$

Khi đó:

a. A là một toán tử tuyến tính bị chặn và $\|A\|^* = \|A\|$;

b. A là một toán tử tuyến tính bị chặn và $\|A\|^* = \frac{1}{2}\|A\|$;

c. A là một toán tử tuyến tính không bị chặn và $\|A\|^* = \|A\|$;

d. A là một toán tử tuyến tính không bị chặn và $\|A\|^* = \frac{1}{2}\|A\|$.

Câu 7: Cho A là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Hilbert X vào trong nó, $f \in X$ cho trước, λ là một số thực. Phương trình toán tử loại I là phương trình có dạng:

a. $A\varphi = f$;

b. $Af = f$;

c. $A\varphi = \varphi + f$;

d. $A\varphi = \lambda\varphi + f$.

Câu 8: Cho $K(x,s)$ là hạch của toán tử tích phân A xác định trên không gian $L^2_{[a,b]}$. Hạch $K(x,s)$ được gọi là hạch suy biến nếu nó có dạng

a. $K(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)q_i(s), \quad p_i, q_i \in L^2_{[a,b]}$;

b. $K(x,s)=\sum_{i=1}^{m} p_i(x)q_i(s), \quad p_i, q_i \in L^2_{[a,b]}$;

c. $K(x,s)=\sum_{i=1}^{m} p_i(x,s)q_i(x,s), \quad p_i, q_i \in L^2_{[a,b]\times[a,b]}$;

d. $K(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x,s)q_i(x,s), \quad p_i, q_i \in L^2_{[a,b]\times[a,b]}$.

Câu 9: Cho $A: L^2_{[0,1]} \to L^2_{[0,1]}$ là toán tử xác định bởi $(A\varphi)(x) = x\varphi(x),\ x \in [0;1]$. Khi đó:

a. $(Ax, y) = (x, Ay)$ và $\|A\| \neq 1$;

b. $(Ax, y) \neq (x, Ay)$ và $\|A\| \neq 1$;

c. $(Ax, y) = (x, Ay)$ và $\|A\| = 1$;

d. $(Ax, y) \neq (x, Ay)$ và $\|A\| = 1$;

Câu 10: Trên không gian Hilbert l^2 cho các phiếm hàm $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ và $g(x) = \sup_k |x_k|$, trong đó $x = (x_n) \in l_2$, n là số nguyên dương cố định. Khi đó

a. f tuyến tính, g không tuyến tính;

b. f tuyến tính, g tuyến tính;

c. f không tuyến tính, g tuyến tính;

d. f không tuyến tính, g không tuyến tính.