

ThS. TRẦN THỊ THỰC LINH

Giải bài tập

Xử lý tín hiệu số và Matlab

NHÀ XUẤT BẢN THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chương 1

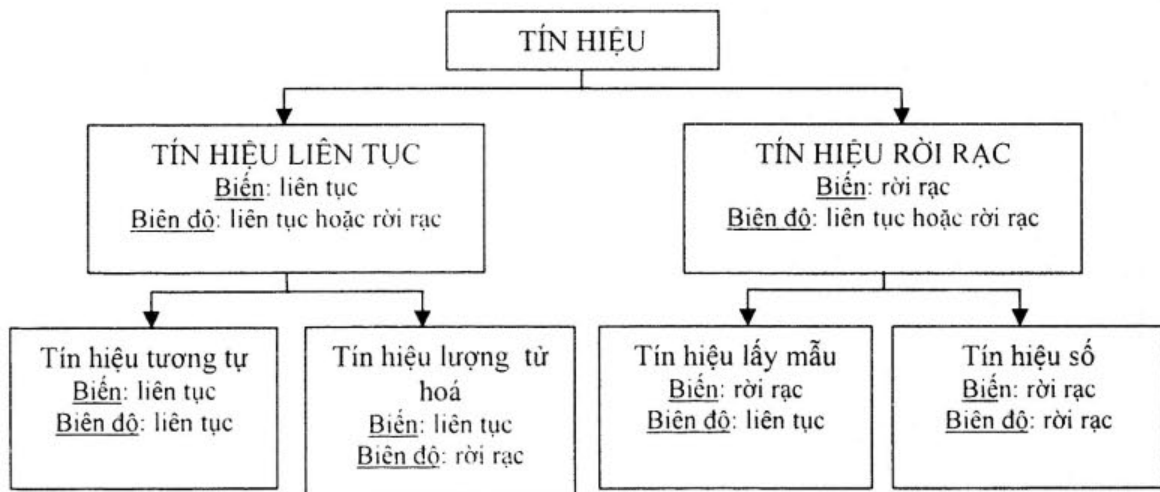
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

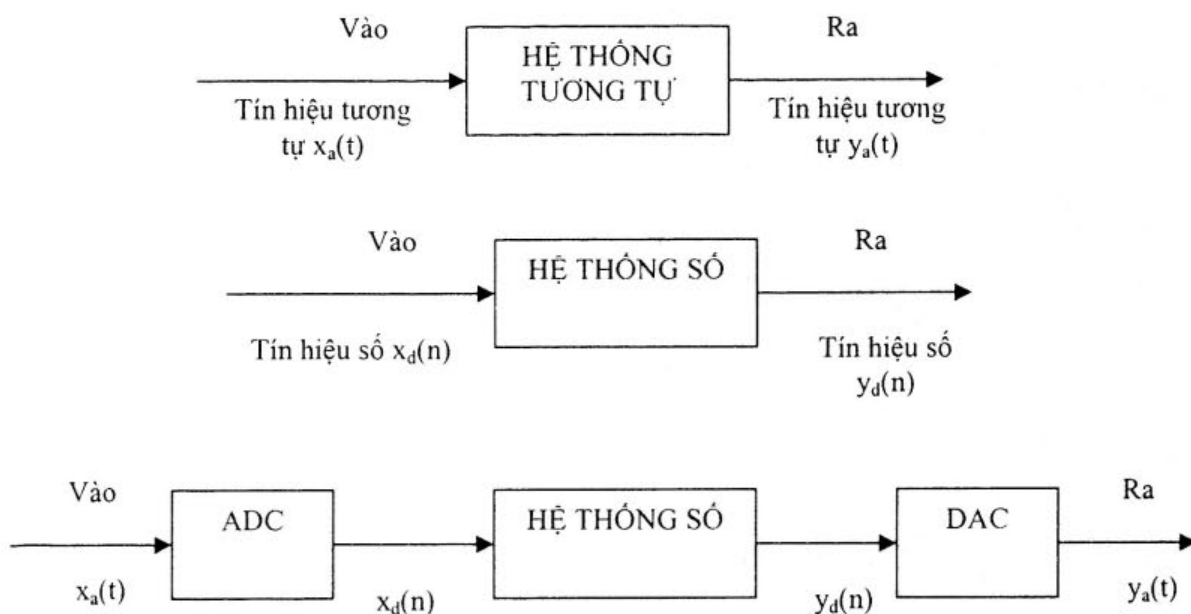
1.1. Định lý lấy mẫu

Ta chú ý rằng một tín hiệu sẽ được khôi phục khi tần số lấy mẫu phải lớn hơn hoặc bằng hai lần bề rộng phổ của tín hiệu. $F_s \geq 2B$ ($B = F_{\max}$)

1.2. Phân loại tín hiệu



1.3. Các hệ thống xử lý tín hiệu



1.4. Tín hiệu rời rạc

1.4.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc

- Biểu diễn bằng hàm số
- Biểu diễn bằng bảng
- Biểu diễn bằng dãy số
- Biểu diễn bằng đồ thị

Chú ý: một tín hiệu bất kỳ $x(n)$ đều được biểu diễn thông qua đáp ứng xung dạng tổng quát như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

1.4.2 Một số dãy cơ bản

a) Dãy xung đơn vị:

Trong miền n , dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

b) Dãy nhảy đơn vị:

Trong miền n , dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

c) Dãy chữ nhật:

Trong miền n , dãy chữ nhật được định nghĩa như sau: $\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

d) Dãy dốc đơn vị:

Trong miền n , dãy dốc đơn vị được định nghĩa như sau: $r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

e) Dãy hàm mũ:

Trong miền n , dãy hàm mũ được định nghĩa như sau:

$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.4.3. Một số định nghĩa

a. Dãy tuần hoàn:

Ta nói rằng một dãy $x(n)$ là tuần hoàn với chu kỳ N nếu thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$x(n) = x(n+N) = x(n+\ell N)$$

Ký hiệu: $\bar{x}(n)_N$.

b. Dãy có chiều dài hữu hạn:

Một dãy được xác định với số hữu hạn N mẫu ta gọi là dãy có chiều dài hữu hạn với N là chiều dài của dãy.

c. Năng lượng của dãy:

Năng lượng của một dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

d. Công suất trung bình của một tín hiệu

Công suất trung bình của một tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

1.4.4. Các phép toán cơ bản

- Phép cộng, phép nhân hai tín hiệu.
- Phép nhân một tín hiệu với hằng số.
- Phép trễ tín hiệu.

1.4.5. Hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB). Đáp ứng xung $h(n)$

- Cần lưu ý hệ thống tuyến tính bất biến phải thỏa mãn nguyên lý xếp chồng:

$$T[a.x_1(n) + b.x_2(n)] = a.T[x_1(n)] + b.T[x_2(n)].$$

- Hệ thống tuyến tính bất biến: ứng với kích thích đầu vào $x(n)$ ta có đáp ứng ra là $y(n)$ thì tương tự ứng với kích thích đầu vào $x(n-k)$ ta có đáp ứng ra là $y(n-k)$.

- Khi ta có đầu vào hệ thống tuyến tính bất biến là xung đơn vị $\delta(n)$ thì đầu ra là đáp ứng xung $h(n)$. Đáp ứng xung $h(n)$ là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính bất biến.

1.4.6. Phép chập:

Đây là phép toán quan trọng nhất trong xử lý tín hiệu để xác định đầu ra $y(n)$ hệ thống khi biết đầu vào $x(n)$ và đáp ứng xung $h(n)$.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k)$$

Phép chập có tính chất: giao hoán, phân phối, kết hợp.

1.4.7. Hệ thống TTBB nhân quả, tín hiệu nhân quả

Hệ thống TTBB được gọi là hệ thống nhân quả khi đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn:

$$h(n) = 0 \text{ với } \forall n < 0.$$

Tín hiệu $x(n)$ được gọi tín hiệu nhân quả khi nó thỏa mãn $x(n) = 0$ với $\forall n < 0$.

Lưu ý: Các hệ thống nhân quả và tín hiệu nhân quả mới tồn tại trong thực tế

Hệ thống TTBB ổn định

Hệ thống ổn định là hệ thống BIBO, đáp ứng xung $h(n)$ của nó phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

1.4.8. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PTSPTTHSH)

Quan hệ vào ra của hệ thống tuyến tính bất biến sẽ được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n)x(n-r)$$

Trong đó: - x đầu vào.

- y đầu ra.

Các hệ số a_k , b_r đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống có vai trò tương tự như đáp ứng xung $h(n)$.

Việc giải PTSPTTHSH để tìm ra đầu ra $y(n)$ có hai phương pháp chính:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp tìm nghiệm riêng ($y_p(n)$) và nghiệm thuần nhất ($y_0(n)$), suy ra nghiệm tổng quát $y(n) = y_0(n) + y_p(n)$.

Từ PTSPTTHSH trên ta sẽ có một số khái niệm về:

- **Hệ thống không đệ quy** khi $N = 0$. Bản chất của hệ thống này là không có thành phần hồi tiếp.
- **Hệ thống đệ quy** khi $N \neq 0$. Bản chất của hệ thống này là có thành phần hồi tiếp.
- **Hệ thống đệ quy thuần túy** khi $N \neq 0$, $M = 0$. Hệ thống này chỉ gồm duy nhất các thành phần đệ quy.

Lưu ý: Như vậy đến đây ta có hai cách biểu diễn quan hệ vào ra hệ thống rời rạc.

- Biểu diễn theo phép chập: $y(n) = x(n)*h(n)$

- Biểu diễn theo phương trình SPTTHSH: $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$ (thường

phải chuẩn hoá $a_0 = 1$)

1.4.9. Thực hiện hệ thống

Các phần tử thực hiện hệ thống bao gồm: phần tử cộng, phần tử nhân, nhân với hằng số, phần tử trễ D.

Khi thực hiện hệ thống phải dựa vào PTSPTTHSH, luôn nhớ phải chuẩn hoá hệ số $a_0 = 1$ để có $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$ rồi mới vẽ sơ đồ hệ thống. Trên thực tế người ta sẽ dùng các bộ xử lý toán học ALU, các thanh ghi dịch... để thực hiện hệ thống xử lý tín hiệu số theo sơ đồ.

1.4.10. Tương quan tín hiệu

Phép tương quan thường dùng để nhận biết các tín hiệu, phân biệt tín hiệu với nhiễu, phát hiện vật thể... Có hai loại tương quan:

- Tự tương quan: Tương quan tín hiệu $x(n)$ với chính nó: $R_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).x(m-n)$.

- Tương quan chéo: Tương quan tín hiệu $x(n)$ với $y(n)$: $R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).y(m-n)$.

B. BÀI TẬP CƠ BẢN

1.1. Cho tín hiệu $x_a(t) = 3\cos 100\pi t$

- Xác định tốc độ lấy mẫu nhỏ nhất cần thiết để tránh sự chồng mẫu.
- Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 200$ Hz. Tín hiệu rời rạc nào sẽ có được sau lấy mẫu?
- Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 75$ Hz. Tín hiệu rời rạc nào đạt được sau lấy mẫu?
- Tần số $F < F_s/2$ của một hình sin có các mẫu đồng nhất với các mẫu trong phần c) là bao nhiêu?

Lời giải:

a) Tần số của tín hiệu tương tự là $F = 50$ Hz. Vì thế, tốc độ lấy mẫu tối thiểu cần thiết để tránh hiện tượng chồng mẫu là $F_s = 100$ Hz.

b) Nếu tín hiệu được lấy mẫu tại $F_s = 200$ Hz thì tín hiệu rời rạc có dạng:

$$x(n) = 3\cos(100\pi/200)n = 3\cos(\pi/2)n$$

c) Nếu $F_s = 75$ Hz, tín hiệu rời rạc có dạng

$$x(n) = 3\cos(100\pi/75)n = 3\cos(4\pi/3)n = 3\cos(2\pi - 2\pi/3)n = 3\cos(2\pi/3)n$$

d) Đối với tốc độ lấy mẫu $F_s = 75$ Hz, ta có: $F = fF_s = 75f$

Tần số của tín hiệu sin trong phần c) là $f = 1/3$. Do đó: $F = 25$ Hz

Tín hiệu sin là: $y_a(t) = 3\cos 2\pi Ft = 3\cos 50\pi t$ được lấy mẫu tại $F_s = 75$ mẫu/s sinh ra các mẫu đồng nhất. Vì thế $F = 50$ Hz là bí danh (alias) của $F = 25$ Hz ứng với tốc độ lấy mẫu $F_s = 75$ Hz.

1.2. Xét tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Hãy xác định tốc độ Nyquist đối với tín hiệu này?

Lời giải: Tín hiệu trên có các tần số thành phần sau:

$$F_1 = 25 \text{ Hz}, \quad F_2 = 150 \text{ Hz}, \quad F_3 = 50 \text{ Hz}$$

Như vậy, $F_{\max} = 150$ Hz và theo định lý lấy mẫu ta có: $F_s > 2F_{\max} = 300$ Hz

Tốc độ Nyquist là $F_N = 2F_{\max}$. Do đó, $F_N = 300$ Hz.

Nhận xét: Ta nhận thấy rằng, khi lấy mẫu thành phần tín hiệu $10\sin 300\pi t$ với tốc độ Nyquist $F_N = 300$ Hz sẽ tạo được các mẫu $10\sin \pi n$ có giá trị luôn luôn bằng không. Nói khác đi, ta đã lấy mẫu tín hiệu hình sin tại các điểm nó cắt trục hoành, vì thế thành phần của tín hiệu này bị mất hoàn toàn. Hiện tượng này sẽ không xuất hiện, nếu dao động sin có một sự lệch pha θ nào đó. Khi đó, ta có $10\sin(300\pi t + \theta)$ và nếu lấy mẫu tại tốc độ Nyquist ta có:

$$10\sin(\pi n + \theta) = 10(\sin \pi n \cos \theta + \cos \pi n \sin \theta) = 10\sin \theta \cos \pi n = (-1)^n 10\sin \theta$$

Nếu $\theta \neq 0$ hoặc π thì các mẫu sin, lấy tại tốc độ Nyquist sẽ khác không. Tuy nhiên, biên độ của các mẫu vẫn chưa xác định được một cách chính xác vì pha θ vẫn chưa biết. Biện pháp đơn giản để tránh hiện tượng này là nên lấy mẫu tín hiệu tương tự ở tần số lớn hơn tần số Nyquist.

1.3. Cho tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3 \cos 2000\pi t + 5 \sin 6000\pi t + 10 \cos 12000\pi t$$

- Xác định tốc độ Nyquist của tín hiệu?
- Giả sử rằng, tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 5000$ mẫu/s. Hãy xác định tín hiệu rời rạc thu được sau khi lấy mẫu?
- Hãy xác định tín hiệu tương tự $y_a(t)$, được phục hồi từ các mẫu khi sử dụng công thức nội suy lí tưởng?

Lời giải: a) Các tần số của tín hiệu tương tự này là:

$$F_1 = 1 \text{ kHz}, \quad F_2 = 3 \text{ kHz}, \quad F_3 = 6 \text{ kHz}$$

Như vậy, $F_{\max} = 6 \text{ kHz}$ và theo định lí lấy mẫu, có: $F_s > 2F_{\max} = 12 \text{ kHz}$

Tốc độ Nyquist là: $F_N = 12 \text{ kHz}$.

b) Vì ta chọn $F_s = 5 \text{ kHz}$, nên tần số gập sẽ là: $F_s/2 = 2.5 \text{ kHz}$

đây là tần số cực đại được tín hiệu đã lấy mẫu thể hiện một cách duy nhất. Ta có:

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) = x_a(n/F_s) = 3 \cos 2\pi(1/5)n + 5 \sin 2\pi(3/5)n + 10 \cos 2\pi(6/5)n \\ &= 3 \cos 2\pi(1/5)n + 5 \sin 2\pi(1 - 2/5)n + 10 \cos 2\pi(1 + 1/5)n \\ &= 3 \cos 2\pi(1/5)n + 5 \sin 2\pi(-2/5)n + 10 \cos 2\pi(1/5)n \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta có: $x(n) = 13 \cos 2\pi(1/5)n - 5 \sin 2\pi(2/5)n$

c) Vì chỉ có các thành phần tần số 1 kHz và 2 kHz là hiện diện trong tín hiệu đã lấy mẫu, nên tín hiệu tương tự có thể phục hồi được là

$$y_a(t) = 13 \cos 2000\pi t - 5 \sin 4000\pi t$$

Đây là kết quả khác đáng kể so với tín hiệu gốc $x_a(t)$. Việc méo tín hiệu tương tự gốc như thế này là do ảnh hưởng của hiện tượng chồng mẫu mà nguyên nhân chính là vì tần số lấy mẫu thấp.

1.4. Phân loại các tín hiệu sau theo các tiêu chí (1) tín hiệu một chiều hay nhiều chiều, (2) tín hiệu đơn kênh hay đa kênh, (3) tín hiệu liên tục hay rời rạc theo thời gian, và (4) tín hiệu tương tự hay số (theo biên độ). Hãy đưa ra giải thích ngắn gọn.

- Giá gần đúng của các chứng khoán trên thị trường chứng khoán Việt Nam.
- Một bộ phim màu
- Vị trí của bánh lái của một xe hơi khi chuyển động đối với vật tham chiếu là thân xe.
- Vị trí của bánh lái của một xe hơi khi chuyển động đối với vật tham chiếu là mặt đất.
- Các số đo trọng lượng và chiều cao của một đứa trẻ hàng tháng.

Lời giải:

Gợi ý: