

Mục lục

1 Phương trình vi phân thường cấp I	5
1.1 Mở đầu	5
1.1.1 Các khái niệm	5
1.1.2 Bài toán Cauchy	7
1.2 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm	7
1.2.1 Phương pháp xấp xỉ Picard	7
1.2.2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm	9
1.3 Phân loại nghiệm của phương trình vi phân	12
1.3.1 Các định nghĩa:	12
1.3.2 Ý nghĩa hình học của phương trình vi phân:	13
1.4 Phương pháp giải một số phương trình vi phân cấp I	14
1.4.1 Phương trình với biến số phân ly:	14
1.4.2 Phương trình vi phân thuần nhất:	16
1.4.3 Phương trình vi phân toàn phần:	18
1.4.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp I:	20
1.4.5 Phương trình Bernoulli	22
1.4.6 Phương trình Darboux	23
1.4.7 Phương trình Riccati:	24
2 Phương trình vi phân cấp I chưa giải ra đối với đạo hàm	27
2.1 Các PTVP chưa giải ra đối với đạo hàm dạng đặc biệt	27
2.1.1 F chỉ phụ thuộc vào y'	27
2.1.2 Dạng có thể giải ra đối với y hay x :	28
2.1.3 F không phụ thuộc vào y	29
2.2 Trường hợp tổng quát – Phương trình Clairaut và phương trình Lagrange	29
2.2.1 Tham số hoá tổng quát:	29
2.2.2 Phương trình Clairaut	31

2.2.3	Phương trình Lagrange	32
2.3	Nghiệm kỳ dị của PTVP cấp I	33
2.3.1	Sự tồn tại nghiệm kỳ dị	33
2.3.2	Tìm nghiệm kỳ dị theo p -biệt tuyến	34
2.3.3	Tìm nghiệm kỳ dị theo C -biệt tuyến	36
3	Phương trình vi phân cấp cao	39
3.1	Phương trình vi phân cấp cao	39
3.1.1	Các khái niệm:	39
3.1.2	Sự tồn tại và duy nhất nghiệm:	40
3.1.3	Một số phương trình vi phân cấp cao giải được bằng cầu phương:	40
3.1.4	Một số phương trình vi phân cấp cao có thể hạ cấp:	43
3.1.5	Tích phân trung gian và tích phân đầu:	45
3.2	Lý thuyết tổng quát về phương trình vi phân tuyến tính.	46
3.3	Định thức Wronski - Nghiệm tổng quát	47
3.3.1	Đồng nhất thức Abel	50
3.3.2	Phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất	51
3.4	Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao hệ số hằng	53
3.4.1	Nghiệm của phương trình thuần nhất hệ số hằng	53
3.4.2	Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất:	55
4	Hệ phương trình vi phân cấp I	61
4.1	Hệ phương trình vi phân cấp I tổng quát.	61
4.1.1	Các định nghĩa:	61
4.1.2	Liên hệ giữa hệ phương trình và phương trình vi phân cấp cao:	62
4.1.3	Sự tồn tại và duy nhất nghiệm	63
4.1.4	Các phương pháp giải hệ phương trình vi phân:	64
4.2	Một số định lý cơ bản của phương trình vi phân	67
4.2.1	Sự tồn tại nghiệm:	67
4.2.2	Thác triển nghiệm và sự tồn tại toàn cục:	68
4.3	Hệ phương trình vi phân tuyến tính	69
4.3.1	Hệ tuyến tính thuần nhất:	70
4.3.2	Hệ PTVP tuyến tính không thuần nhất:	72
4.4	Hệ PTVP tuyến tính hệ số hằng số.	73
4.4.1	Phương trình đặc trưng	73

4.4.2	Hệ nghiệm cơ bản	74
5	Phương pháp số giải phương trình vi phân	79
5.1	Các phương pháp giải tích giải gần đúng PTVP.	79
5.1.1	Xấp xỉ Picard.	79
5.1.2	Phương pháp chuỗi Taylor.	81
5.2	Các phương pháp số giải PTVP.	82
5.2.1	Phương pháp chuỗi Taylor.	84
5.2.2	Phương pháp Euler và Euler cải tiến.	85
5.2.3	Các phương pháp Runge–Kutta.	86
5.2.4	Các phương pháp đa bước (multi-step):	89
5.3	Phương trình vi phân và phần mềm tính toán MAPLE.	90
5.3.1	Giới thiệu chung:	90
5.3.2	Vẽ đường cong tích phân và trường các hướng	91
5.3.3	Giải phương trình vi phân bằng MAPLE.	91
5.3.4	Giải gần đúng phương trình vi phân bằng MAPLE	92
6	Nghiệm chuỗi của phương trình vi phân	99
6.1	Khái niệm chuỗi lũy thừa.	99
6.2	Nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng chuỗi lũy thừa.	101
6.2.1	Các ví dụ.	102
6.2.2	Điểm kỳ dị của phương trình vi phân.	105
6.3	Khai triển tiệm cận của nghiệm.	110
6.3.1	Sơ lược về khai triển tiệm cận.	110
6.3.2	Dạng điều kiện tiệm cận của nghiệm gần điểm kỳ dị không chính qui.111	
6.3.3	Khai triển tiệm cận của nghiệm:	114
6.3.4	Sơ lược về phương pháp WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin)	114
A	Biến đổi Laplace và phương trình vi phân.	117
A.1	Biến đổi Laplace.	117
A.2	Giải phương trình vi phân bằng phép biến đổi Laplace:	119
	Tài liệu tham khảo	123

Chương 1

Phương trình vi phân thường cấp I

1.1 Mở đầu

Trong rất nhiều lĩnh vực ứng dụng, chuyển động của một hệ được mô hình hoá bởi các phương trình vi phân, tức là phương trình có chứa các đạo hàm của ẩn hàm cần tìm. Chẳng hạn, trong cơ học cổ điển (định luật Newton), trong thiên văn học (sự chuyển động của các hành tinh), trong hoá học (các phản ứng hoá học), trong sinh học (sự phát triển của dân số), trong điện tử... Trong hầu hết các lĩnh vực như thế, bài toán chung nhất là mô tả nghiệm của các phương trình này (cả về định tính lẫn về định lượng).

1.1.1 Các khái niệm

Phương trình vi phân thường là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (1.1)$$

trong đó $y = y(x)$ là ẩn hàm cần tìm và nhất thiết phải có sự tham gia của đạo hàm (đến cấp nào đó) của ẩn.

Thông thường ta xét các phương trình với ẩn hàm là hàm số một biến thực $y = y(x)$ xác định trên khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$ nào đó; khi đó hàm F trong đẳng thức trên xác định trong một tập mở G của $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+1}$. Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là vector-hàm (hàm với giá trị vector) $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$, F là một ánh xạ nhận giá trị trong \mathbb{R}^n và (1.1) được hiểu là hệ phương trình vi phân.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là hàm nhiều biến thì phương trình vi phân còn gọi là *phương trình đạo hàm riêng*

Ta nói một phương trình vi phân có *cấp* m nếu m là cấp lớn nhất của đạo hàm của ẩn có mặt trong phương trình.

Phương trình vi phân thường cấp I có dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.2)$$

trong đó $F(x, y, z)$ được giả thiết liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó trên miền $G \subset \mathbb{R}^3$. Với một số điều kiện nào đấy, phương trình vi phân cấp I có thể viết được dưới dạng sau, gọi là dạng *giải ra được đối với đạo hàm*

$$y' = f(x, y) \quad (1.3)$$

với f liên tục trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Öi dụ: Các phương trình

$$\begin{aligned} e^y + y'^2 \cos x &= 1 \\ y''^2 - 2xy &= \ln x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

lần lượt là phương trình vi phân thường cấp I, cấp III và phương trình đạo hàm riêng cấp II.

Xét phương trình (1.1), hàm giá trị vector $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I = (a, b)$ là khoảng nào đó của \mathbb{R}) là *nghiệm* của phương trình (1.1) nếu nó có các đạo hàm liên tục đến cấp m trên I và thỏa mãn

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0 \quad \text{với mọi } x \in I \quad (1.4)$$

Trong trường hợp phương trình vi phân cấp I, nghiệm là một hàm thực một ẩn $y = y(x)$ mà khi thay vào (1.2), ta được một đẳng thức đúng.

Öi dụ: Dễ kiểm tra rằng họ hàm (phụ thuộc vào hai tham số tùy ý)

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

là nghiệm của phương trình vi phân

$$y'' + y = 0$$

Öi dụ: (*Săn môi và môi*) Sự phát triển của hai quần thể động vật (chẳng hạn, $x = x(t)$ là số con mèo và $y = y(t)$ là số con chuột) được mô tả bởi (hệ) phương trình Volterra–Lotka sau đây

$$y' = y(\alpha - \beta x), \quad x' = x(\gamma y - \delta) \quad (1.5)$$

với α, β, γ và δ là những hằng số cho trước.

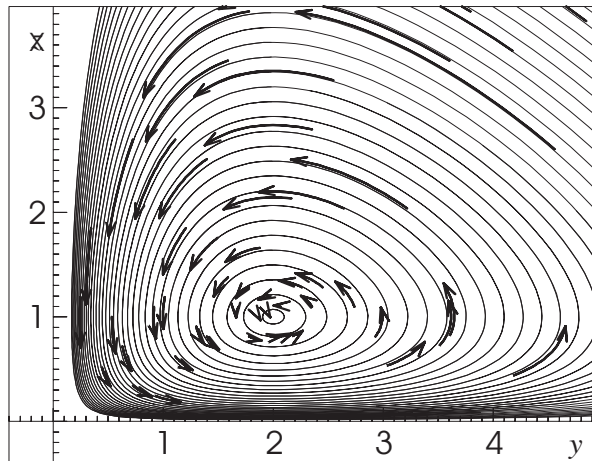
Để tìm nghiệm của phương trình này ta có thể xem y như là hàm theo x , phương trình có thể viết dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(\gamma y - \delta)} \quad \text{hay} \quad \frac{(\gamma y - \delta)}{y} dy = \frac{(\alpha - \beta x)}{x} dx$$

Nghiệm của phương trình này cho bởi

$$\gamma y - \delta \ln y = \alpha \ln x - \beta x + C$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Hình 1.1 mô tả các đường mức của nghiệm khi $\alpha = \beta = \gamma = 1, \delta = 2$.



Hình 1.1: Nghiệm của phương trình Volterra–Lotka.

1.1.2 Bài toán Cauchy

Ta nhận xét rằng nói chung, nghiệm của một phương trình vi phân phụ thuộc vào một hay nhiều tham số tùy ý nào đó; nói cách khác ta có từng họ nghiệm. Để xác định nghiệm cụ thể nào đó, nói chung ta cần thêm một hay vài đặc trưng khác về nghiệm (tùy theo cấp của phương trình vi phân). Chẳng hạn, $y = \frac{x^3}{3} + C$ là (họ) nghiệm của phương trình $y' = x^2$. Dễ thấy $y = \frac{x^3}{3} + 1$ là nghiệm (duy nhất) thỏa điều kiện $y(0) = 1$.

Ta xét bài toán sau đây đặt ra đối với phương trình (1.2), gọi là *bài toán Cauchy* (còn gọi là *bài toán giá trị ban đầu*):

Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (1.2) thỏa

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.6)$$

trong đó $(x_0, y_0) \in D$ được gọi là các *điều kiện ban đầu*.

Câu hỏi tự nhiên đặt ra là với điều kiện ban đầu (1.6), có hay không và bao nhiêu nghiệm thỏa mãn điều kiện này. Trả lời câu hỏi này tức là giải bài toán Cauchy đối với phương trình (1.2). Ta lưu ý rằng không phải lúc nào bài toán Cauchy cũng có nghiệm, và khi có nghiệm cũng không nhất thiết có duy nhất nghiệm. Trong mục sau ta sẽ phát biểu và chứng minh một định lý giải quyết trọn vẹn bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp I.

1.2 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

1.2.1 Phương pháp xấp xỉ Picard

Ta xét bài toán Cauchy đối với phương trình cấp I dạng giải ra được đối với đạo hàm:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.7)$$

trong đó f xác định và liên tục trên miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$.

Giả sử $y(x)$ là nghiệm của bài toán (1.7), tích phân hai vế của phương trình trong (1.7) ta được *phương trình tích phân* cho $y(x)$ là

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.8)$$

Rõ ràng mỗi nghiệm của (1.7) cũng là nghiệm của (1.8) và ngược lại, mỗi nghiệm của (1.8) đều khả vi liên tục (tức là thuộc lớp C^1) trên một khoảng I nào đó và thoả phương trình (1.7).

Phép lặp Picard–Lindelöf.

Về mặt toán tử, nghiệm của phương trình tích phân (1.8) chính là lời giải của *bài toán điểm bất động* của các ánh xạ co trong không gian metric đầy đủ (ở đây ta xét không gian các hàm khả vi liên tục trên I) mà lời giải có thể cho bởi *phương pháp xấp xỉ liên tiếp Picard–Lindelöf* sau đây.

Xét dãy các hàm xác định một cách đệ qui bởi

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \quad (\text{hay một hàm nào đó}) \\ y_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt, \quad \text{với } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Bổ đề 1.2.1. *Giả sử f liên tục trên hình chữ nhật*

$$D = \{(x, y) / |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

Đặt $M := \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$ và $h := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Khi đó với mọi $x \in I := [x_0 - h, x_0 + h]$ ta có

$$|y_k(x) - y_0| \leq b, \quad \text{với mọi } k$$

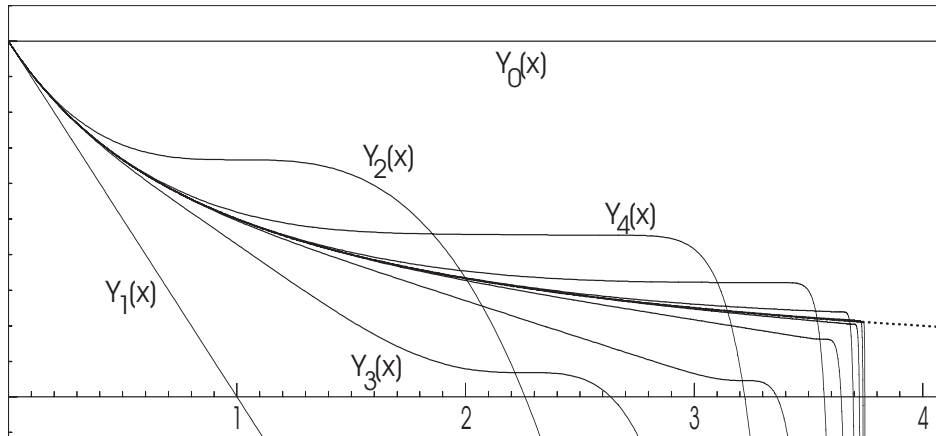
Nói cách khác, các hàm y_k không đi ra khỏi hình chữ nhật D .

Chứng minh: Ta có, với $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$:

$$|y_k - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{k-1}(t))| dt \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b$$

□

Öi dụ: Xét phương trình $y' = -y^2$, với $y(0) = 1$. Nghiệm chính xác của nó là $y = \frac{1}{x+1}$. Vài xấp xỉ đầu tiên trong phép lặp Picard-Lindelöf là $y_0 = 1$, $y_1 = 1 - x$, $y_2 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3}$... (xem Hình 1.2). Ta nhận thấy các xấp xỉ y_k hội tụ nhanh khi x bé, với các giá trị x lớn phép lặp là phân kỳ.



Hình 1.2: Phép lặp Picard–Lindelöf cho phương trình $y' = -y^2$, với $y(0) = 1$

1.2.2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Trong phần này ta sẽ phát biểu và chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết phương trình vi phân, khẳng định sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

Định nghĩa 1.2.1. Cho hàm $f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói f thỏa điều kiện Lipschitz trên D theo biến y nếu tồn tại hằng số dương L (gọi là hằng số Lipschitz) sao cho:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad \text{với mọi } (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

Nhận xét: Điều kiện Lipschitz là yếu hơn so với điều kiện giới nội của đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ trên D . Thật vậy, giả sử $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục và $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M$. Khi đó, áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x, y)$ theo biến y ta được

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2) \frac{\partial f}{\partial y} [x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)]$$

Từ đó suy ra điều kiện Lipschitz.

Định lý 1.2.2 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm). Giả sử hàm số $f(x, y)$ trong (1.3) liên tục và thỏa điều kiện Lipschitz theo biến y trên hình chữ nhật

$$D = \{(x, y) / |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

Khi đó nghiệm của bài toán Cauchy (1.7) là tồn tại và duy nhất trong đoạn $I := [x_0 - h, x_0 + h]$, với $h := \min(a, \frac{b}{M})$ và $M := \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$.

Chứng minh: Chứng minh chia làm hai bước:

Sự tồn tại:

Ta chứng minh rằng phép lặp Picard hội tụ đều trên I đến một nghiệm của bài toán Cauchy. Trước tiên ta chứng minh, bằng qui nạp rằng

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \text{với mọi } x \in I$$

Với $k = 0$, bất đẳng thức trên chính là $\left| \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt \right| \leq M|x - x_0|$, bất đẳng thức này đúng.

Giả sử ta có điều đó với $k - 1$, khi đó với $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ ta có

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| dt \leq L \int_{x_0}^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \\ &\leq ML^k \int_{x_0}^x \frac{|x - x_0|^k}{k!} dt = ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

(với $x_0 - h \leq x \leq x_0$ ta đánh giá tương tự).

Xét dãy hàm $\{y_k(x)\}$ trên I , ta có

$$\begin{aligned} |y_{k+p}(x) - y_k(x)| &\leq |y_{k+p}(x) - y_{k+p-1}(x)| + |y_{k+p-1}(x) - y_{k+p-2}(x)| + \cdots + |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \\ &\leq \frac{M}{L} \left\{ \frac{(L|x - x_0|)^{k+p}}{(k+p)!} + \cdots + \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{j \geq k+1} \frac{(Lh)^j}{j!} \end{aligned}$$

Chuỗi số $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Lh)^j}{j!}$ là hội tụ, nên phần dư của nó mà xuất hiện trong biểu thức cuối cùng có thể làm cho bé tùy ý khi k đủ lớn. Theo tiêu chuẩn Cauchy, dãy $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều trên I đến hàm $y(x)$. Để chứng minh $y(x)$ là nghiệm chỉ cần qua giới hạn trong đẳng thức

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$$

Vì dãy hàm $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều, f liên tục (đều) trên hình chữ nhật D nên dãy hàm $\{f(t, y_k(t))\}$ hội tụ đều trên I đến hàm $f(t, y(t))$. Do đó có thể chuyển giới hạn qua dấu tích phân để được đẳng thức (1.8). Vậy $y(x)$ chính là nghiệm của bài toán Cauchy (1.7).