Mục lục

Chương 1

Phương trình vi phân thường cấp I

1.1 Mở đầu

Trong rất nhiều lĩnh vực ứng dụng, chuyển động của một hệ được mô hình hoá bởi các phương trình vi phân, tức là phương trình có chứa các đạo hàm của ẩn hàm cần tìm. Chẳng hạn, trong cơ học cổ điển (định luật Newton), trong thiên văn học (sự chuyển động của các hành tinh), trong hoá học (các phản ứng hoá học), trong sinh học (sự phát triển của dân số), trong điện tử... Trong hầu hết các lĩnh vực như thế, bài toán chung nhất là mô tả nghiệm của các phương trình này (cả về định tính lẫn về định lượng).

1.1.1 Các khái niệm

Phương trình vi phân thường là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}) = 0 \tag{1.1}$$

trong đó $y = y(x)$ là *ẩn* hàm cần tìm và nhất thiết phải có sự tham gia của đạo hàm (đến cấp nào đó) của ẩn.

Thông thường ta xét các phương trình với ẩn hàm là hàm số một biến thực $y = y(x)$ xác định trên khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$ nào đó; khi đó hàm F trong đẳng thức trên xác định trong một tập mở G của $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+1}$. Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là vector-hàm (hàm với giá trị vector) $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$, F là một ánh xạ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ và (1.1) được hiểu là *hệ phương trình vi phân*.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là hàm nhiều biến thì phương trình vi phân còn gọi là *phương trình đạo hàm riêng*

Ta nói một phương trình vi phân có *cấp* m nếu m là cấp lớn nhất của đạo hàm của ẩn có mặt trong phương trình.

Phương trình vi phân thường cấp I có dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.2}$$

trong đó $F(x, y, z)$ được giả thiết liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó trên miền $G \subset \mathbb{R}^3$. Với một số điều kiện nào đấy, phương trình vi phân cấp I có thể viết được dưới dạng sau, gọi là dạng *giải ra được đối với đạo hàm*

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

với f liên tục trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Ví dụ: Các phương trình

$$\begin{aligned}
&e^y + y'^2 \cos x = 1 \\
&y'''^2 - 2xy = \ln x \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0
\end{aligned}$$

lần lượt là phương trình vi phân thường cấp I, cấp III và phương trình đạo hàm riêng cấp II.

Xét phương trình (1.1), hàm giá trị vector $y : I \to \mathbb{R}^n$ ($I = (a, b)$ là khoảng nào đó của $\mathbb{R}$) là *nghiệm* của phương trình (1.1) nếu nó có các đạo hàm liên tục đến cấp m trên I và thoả mãn

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(m)})(x) = 0 \quad \text{với mọi } x \in I \tag{1.4}$$

Trong trường hợp phương trình vi phân cấp I, nghiệm là một hàm thực một ẩn $y = y(x)$ mà khi thay vào (1.2), ta được một đẳng thức đúng.

Ví dụ: Dễ kiểm tra rằng họ hàm (phụ thuộc vào hai tham số tuỳ ý)

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

là nghiệm của phương trình vi phân

$$y'' + y = 0$$

Ví dụ: (*Săn mồi và mồi*) Sự phát triển của hai quần thể động vật (chẳng hạn, $x = x(t)$ là số con mèo và $y = y(t)$ là số con chuột) được mô tả bởi (hệ) phương trình Volterra–Lotka sau đây

$$y' = y(\alpha - \beta x), \quad x' = x(\gamma y - \delta) \tag{1.5}$$

với α, β, γ và δ là những hằng số cho trước.

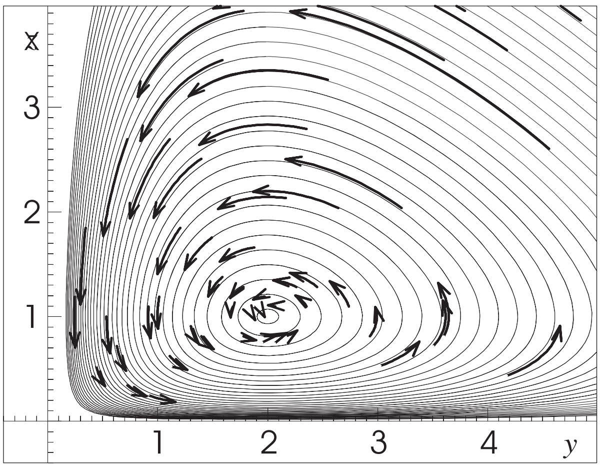
Để tìm nghiệm của phương trình này ta có thể xem y như là hàm theo x, phương trình có thể viết dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(\gamma y - \delta)} \quad \text{hay} \quad \frac{(\gamma y - \delta)}{y} dy = \frac{(\alpha - \beta x)}{x} dx$$

Nghiệm của phương trình này cho bởi

$$\gamma y - \delta \ln y = \alpha \ln x - \beta x + C$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Hình 1.1 mô tả các đường mức của nghiệm khi $\alpha = \beta = \gamma = 1, \delta = 2$.



Hình 1.1: Nghiệm của phương trình Volterra–Lotka.

1.1.2 Bài toán Cauchy

Ta nhận xét rằng nói chung, nghiệm của một phương trình vi phân phụ thuộc vào một hay nhiều tham số tuỳ ý nào đó; nói cách khác ta có từng *họ* nghiệm. Để xác định nghiệm cụ thể nào đó, nói chung ta cần thêm một hay vài đặc trưng khác về nghiệm (tuỳ theo cấp của phương trình vi phân). Chẳng hạn, $y = \frac{x^3}{3} + C$ là (họ) nghiệm của phương trình $y' = x^2$. Dễ thấy $y = \frac{x^3}{3} + 1$ là nghiệm (duy nhất) thoả điều kiện $y(0) = 1$.

Ta xét bài toán sau đây đặt ra đối với phương trình (1.2), gọi là *bài toán Cauchy* (còn gọi là *bài toán giá trị ban đầu*):

Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (1.2) thoả

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.6}$$

trong đó $(x_0, y_0) \in D$ được gọi là các *điều kiện ban đầu*.

Câu hỏi tự nhiên đặt ra là với điều kiện ban đầu (1.6), có hay không và bao nhiêu nghiệm thoả mãn điều kiện này. Trả lời câu hỏi này tức là giải bài toán Cauchy đối với phương trình (1.2). Ta lưu ý rằng không phải lúc nào bài toán Cauchy cũng có nghiệm, và khi có nghiệm cũng không nhất thiết có duy nhất nghiệm. Trong mục sau ta sẽ phát biểu và chứng minh một định lý giải quyết trọn vẹn bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp I.

1.2 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

1.2.1 Phương pháp xấp xỉ Picard

Ta xét bài toán Cauchy đối với phương trình cấp I dạng giải ra được đối với đạo hàm:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.7}$$

trong đó f xác định và liên tục trên miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$.

Giả sử $y(x)$ là nghiệm của bài toán (1.7), tích phân hai vế của phương trình trong (1.7) ta được *phương trình tích phân* cho $y(x)$ là

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{1.8}$$

Rõ ràng mỗi nghiệm của (1.7) cũng là nghiệm của (1.8) và ngược lại, mỗi nghiệm của (1.8) đều khả vi liên tục (tức là thuộc lớp C^1) trên một khoảng I nào đó và thoả phương trình (1.7).

Phép lặp Picard−Lindelöf.

Về mặt toán tử, nghiệm của phương trình tích phân (1.8) chính là lời giải của *bài toán điểm bất động* của các ánh xạ co trong không gian metric đầy đủ (ở đây ta xét không gian các hàm khả vi liên tục trên I) mà lời giải có thể cho bởi *phương pháp xấp xỉ liên tiếp Picard−Lindelöf* sau đây.

Xét dãy các hàm xác định một cách đệ qui bởi

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & y_0 \quad \text{(hay một hàm nào đó)} \\ y_{k+1}(x) & = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt, \quad \text{với } k \in \mathbb{N} \end{array}$$

Bổ đề 1.2.1. *Giả sử f liên tục trên hình chữ nhật*

$$D = \{(x, y)/|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

Đặt $M := \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$ và $h := \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$. Khi đó với mọi $x \in I := [x_0 - h, x_0 + h]$ ta có

$$|y_k(x) - y_0| \leq b, \quad \textit{với mọi} k$$

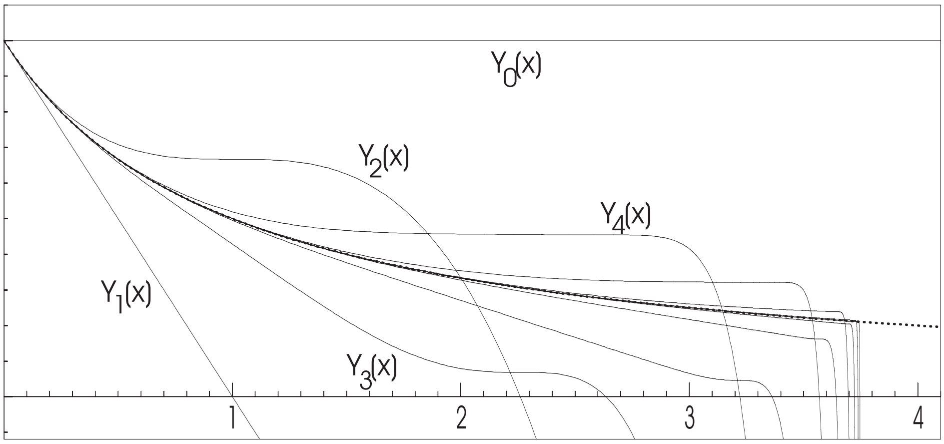
Nói cách khác, các hàm y_k không đi ra khỏi hình chữ nhật D.

Chứng minh: Ta có, với $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$:

$$|y_k - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{k-1}(t))|\, dt \leq M\, |x - x_0| \leq Mh \leq b$$

⊠

Ví dụ: Xét phương trình $y' = -y^2$, với $y(0) = 1$. Nghiệm chính xác của nó là $y = \dfrac{1}{x+1}$. Vài xấp xỉ đầu tiên trong phép lặp Picard-Lindelöf là $y_0 = 1$, $y_1 = 1 - x$, $y_2 = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{3}$...(xem Hình 1.2). Ta nhận thấy các xấp xỉ y_k hội tụ nhanh khi x bé, với các giá trị x lớn phép lặp là phân kỳ.



Hình 1.2: Phép lặp Picard−Lindelof cho phương trình $y' = -y^2$, với $y(0) = 1$

1.2.2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Trong phần này ta sẽ phát biểu và chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết phương trình vi phân, khẳng định sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

Định nghĩa **1.2.1.** Cho hàm $f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói f *thoả điều kiện Lipschitz* trên D theo biến y nếu tồn tại hằng số dương L (gọi là *hằng số Lipschitz*) sao cho:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \qquad \text{với mọi } (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

Nhận xét: Điều kiện Lipschitz là yếu hơn so với điều kiện giới nội của đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ trên D. Thật vậy, giả sử $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục và $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M$. Khi đó, áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x, y)$ theo biến y ta được

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2)\frac{\partial f}{\partial y}\,[x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)]$$

Từ đó suy ra điều kiện Lipschitz.

Định lý 1.2.2 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm). *Giả sử hàm số* $f(x, y)$ *trong* (1.3) *liên tục và thoả điều kiện Lipschitz theo biến* y *trên hình chữ nhật*

$$D = \{(x, y) / \, |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

Khi đó nghiệm của bài toán Cauchy (1.7) *là tồn tại và duy nhất trong đoạn* $I := [x_0 - h, x_0 + h]$, *với* $h := \min(a, \frac{b}{M})$ *và* $M := \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$.

Chứng minh: Chứng minh chia làm hai bước:

Sự tồn tại:

Ta chứng minh rằng phép lặp Picard hội tụ đều trên I đến một nghiệm của bài toán Cauchy. Trước tiên ta chứng minh, bằng qui nạp rằng

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \text{với mọi } x \in I$$

Với $k = 0$, bất đẳng thức trên chính là $\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt\right| \leq M|x - x_0|$, bất đẳng thức này đúng.

Giả sử ta có điều đó với $k - 1$, khi đó với $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ ta có

$$\begin{aligned}
|y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))]\, dt\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))|\, dt \leq L \int_{x_0}^{x} |y_k(t) - y_{k-1}(t)|\, dt \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |y_k(t) - y_{k-1}(t)|\, dt \\
&\leq ML^k \int_{x_0}^{x} \frac{|x - x_0|^k}{k!} dt = ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

(với $x_0 - h \leq x \leq x_0$ ta đánh giá tương tự).

Xét dãy hàm $\{y_k(x)\}$ trên I, ta có

$$\begin{aligned}
|y_{k+p}(x) - y_k(x)| &\leq |y_{k+p}(x) - y_{k+p-1}(x)| + |y_{k+p-1}(x) - y_{k+p-2}(x)| + \cdots + |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \\
&\leq \frac{M}{L} \left\{ \frac{(L|x - x_0|)^{k+p}}{(k+p)!} + \cdots + \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} \\
&\leq \frac{M}{L} \sum_{j \geq k+1} \frac{(Lh)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Chuỗi số $\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(Lh)^j}{j!}$ là hội tụ, nên phần dư của nó mà xuất hiện trong biểu thức cuối cùng có thể làm cho bé tuỳ ý khi k đủ lớn. Theo tiêu chuẩn Cauchy, dãy $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều trên I đến hàm $y(x)$. Để chứng minh $y(x)$ là nghiệm chỉ cần qua giới hạn trong đẳng thức

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt$$

Vì dãy hàm $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều, f liên tục (đều) trên hình chữ nhật D nên dãy hàm $\{f(t, y_k(t))\}$ hội tụ đều trên I đến hàm $f(t, y(t))$. Do đó có thể chuyển giới hạn qua dấu tích phân để được đẳng thức (1.8). Vậy $y(x)$ chính là nghiệm của bài toán Cauchy (1.7).