

**VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC**

PGS.TS. BÙI THẾ TÂM

QUY HOẠCH RỜI RẠC

BÀI GIẢNG CAO HỌC

HÀ NỘI 10-2008

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu này là các Bài giảng của môn *Quy hoạch rời rạc* thuộc Trung tâm đào tạo sau đại học, Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt nam trong các năm 2006, 2007 và 2008. Đây là tài liệu đầu tiên được viết bằng tiếng Việt trình bày một cách hệ thống về Quy hoạch rời rạc với cơ sở lý thuyết chặt chẽ, chứng minh tính hữu hạn của các thuật toán Gomory, hơn nữa còn đưa ra chương trình nguồn viết bằng C cho các thuật toán.

Kiến thức chuẩn bị để tiếp thu giáo trình này là lý thuyết căn bản về quy hoạch tuyến tính và phương pháp đơn hình [9], lập trình bằng ngôn ngữ C++ [11], bảng tính điện tử Microsoft Excel [12].

Tài liệu gồm bảy chương. Chương 1 trình bày các bài toán phát sinh trong thực tiễn dẫn đến các bài toán quy hoạch rời rạc, phát biểu bài toán quy hoạch rời rạc tổng quát. Các bài tập ở cuối chương 1 có thể dùng lệnh Solver trong Microsoft Excel để giải, hướng dẫn lệnh này cho trong tài liệu [12] hoặc [13].

Trong Chương 2 nêu những khái niệm cơ bản về quy hoạch tuyến tính, phương pháp đơn hình bình thường, phương pháp đơn hình đối ngẫu từ vựng và chương trình máy tính viết bằng C++, và khái niệm về bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên.

Chương 3 trình bày tư tưởng phương pháp cắt, thuật toán Gomory thứ nhất và chứng minh sự hội tụ của nó (tài liệu gốc trong [1], [2]), chương trình máy tính của thuật toán Gomory thứ nhất.

Chương 4 xét hai thuật toán: thuật toán Gomory thứ hai dùng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận [3], thuật toán Dalton - Llewellyn dùng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính với các biến nhận giá trị rời rạc [4], chương trình máy tính của hai thuật toán này.

Chương 5 trình bày thuật toán Gomory thứ ba nhằm xây dựng các lát cắt đảm bảo tất cả các Bảng đơn hình ở mỗi bước đều có tất cả các phần tử là nguyên [5], [6], chương trình máy tính của thuật toán Gomory thứ ba.

Chương 6 trình bày tư tưởng của phương pháp nhánh cận, phương pháp Land A.H và Doig A.G giải bài toán qui hoạch nguyên [7], phương pháp Little J.D, Murty K.G, Sweeney D.W và Karen C giải bài toán người du lịch [8].

Các tài liệu gốc [1]-[8] được A.A. Korbut, Iu. Iu. Phinkenstein trình bày lại trong cuốn sách [10]. Năm chương trình bằng ngôn ngữ C trong tài liệu này về Phương pháp đơn ngẫu từ vựng, ba thuật toán Gomory, thuật toán Dalton đều do chính tác giả lập. Bạn đọc quan tâm tới lập trình bằng Pascal cho các bài toán tối ưu của Quy hoạch tuyến tính, Quy hoạch phi tuyến và Quy hoạch rời rạc có thể tham khảo tài liệu [14].

Các trường Đại học, các cơ sở đào tạo có nhu cầu giảng dạy môn này, hoặc hướng dẫn giảng viên để giảng dạy môn này, hoặc bạn đọc muốn góp ý về giáo trình này xin vui lòng liên hệ với tác giả theo địa chỉ: Bùi Thế Tâm, Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà nội ; địa chỉ email: bttam@math.ac.vn

Hà Nội, ngày 4 tháng 10 năm 2008

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Gomory R.E. An algorithm for integer solutions to linear programs. Recent Advances Math. Program. New York - San Francisco - Toronto - London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1963, 269-302.
2. Gomory R.E. Outline of an algorithm for integer solution to linear programs. Bull. Amer. Math. Soc., 1958, 64, N5, 275-278.
3. Gomory R.E. An algorithm for the mixed integer problem. Rand. Corp., P-1885, Santa Monica, California, February 22, 1960.
4. Dalton R.E, Llewellyn R.W. An extension of the Gomory mixed-integer algorithm to mixed-discrete variable. Manag. Sci., 1966, 12, N7, 562-575.
5. Gomory R.E. An all-integer integer programming algorithm. IBM Research Center, 1960, January, Research Report RC-189.
6. Gomory R.E. An all-integer integer programming algorithm. In "Industrial scheduling", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1963, ch. 13.
7. Land A.H, Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems. Econometrica, 1960, 28, N3, 497-520.
8. Little J.D.C, Murty K.G, Sweeney D.W, Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. Operat. Res., 1963, 11, N6, 972-989.
9. Bùi Thế Tâm, Trần Vũ Thiệu. Các phương pháp tối ưu hóa. NXB GTVT, 1998, 408 trang
10. A.A. Korbut, Iu. Iu. Phinkenstein. Quy hoạch rời rạc (tiếng Nga). NXB Khoa học, Mascva, 1969, 368 trang
11. Bùi Thế Tâm. Ngôn ngữ C và lập trình hướng đối tượng. NXB GTVT, 2006, 240 trang.
12. Bùi Thế Tâm. Giáo trình Windows 2000, Word 2000, Excel 2000, Powerpoint 2000. NXB GTVT, 2002.
13. Bùi Thế Tâm. Giải các bài toán tối ưu và thống kê trên Microsoft Exel. Công bố trên <http://ebook.edu.net.vn>, phần Công nghệ thông tin, 2007.
14. Bùi Thế Tâm. Turbo Pascal: lý thuyết cơ bản, bài tập, những chương trình mẫu trong khoa học kỹ thuật và kinh tế. NXB GTVT, 1993, 460 trang.

VÀI NÉT VỀ TÁC GIẢ

B.T. Tâm sinh năm 1948 tại Hiệp Hoà, Bắc Giang; hiện làm việc tại Phòng Tối ưu và Điều khiển thuộc Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt nam; bảo vệ Tiến sỹ tháng 5/1978 tại Viện Hàn lâm Khoa học Liên xô; nhận học hàm Phó giáo sư tháng 7/1996.

MỤC LỤC

Chương 1. Bài toán quy hoạch rời rạc	I.1
1. Định nghĩa bài toán	I.1
2. Các bài toán thực tế dẫn đến bài toán quy hoạch rời rạc	I.2
Chương 2. Những khái niệm mở đầu	II.1
1. Những khái niệm cơ bản về quy hoạch tuyến tính	II.1
2. So sánh theo nghĩa từ vựng	II.3
3. Bảng đơn hình, các phương án và giả phương án	II.4
4. Phương pháp đơn hình	II.5
5. Phương pháp đơn hình đối ngẫu từ vựng	II.6
6. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên	II.16
Chương 3. Thuật toán Gomory thứ nhất	III.1
1. Tư tưởng phương pháp cắt	III.1
2. Thuật toán Gomory thứ nhất	III.5
3. Tính hữu hạn của thuật toán Gomory thứ nhất	III.9
4. Giải ví dụ số	III.11
5. Chương trình máy tính	III.15
Bài tập	III.23
Chương 4. Thuật toán Gomory thứ hai	IV.1
1. Lược đồ logic của thuật toán	IV.1
2. Thuật toán Gomory thứ hai	IV.2
3. Thuật toán Dalton và Llewellyn	IV.20
Bài tập	IV.33
Chương 5. Thuật toán Gomory thứ ba	V.1
1. Ảnh hưởng sai số làm tròn và tư tưởng của thuật toán Gomory thứ ba	V.1
2. Xây dựng lát cắt đúng nguyên, thuật toán Gomory thứ ba	V.3
3. Chương trình máy tính	V.13
Bài tập	V.22
Chương 6. Thuật toán nhánh và cận	VI.1
1. Tư tưởng của phương pháp nhánh và cận	VI.1
2. Phương pháp Land và Doig giải bài toán quy hoạch nguyên	VI.3
3. Phương pháp nhánh cận giải bài toán người du lịch	VI.6
Bài tập	VI.19

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH RỜI RẠC**1. ĐỊNH NGHĨA BÀI TOÁN QUY HOẠCH RỜI RẠC**

Trong các bài toán quy hoạch tuyến tính, các biến số có thể nhận những giá trị thực không âm. Tuy nhiên, trong thực tiễn thường gặp các bài toán mà các biến số chỉ có thể nhận một số hữu hạn hay đếm được giá trị, thường là các giá trị nguyên. Chẳng hạn sẽ là vô nghĩa khi đưa ra câu trả lời: cần sản xuất nửa cái bàn hay cần thuê 2,7 cái ô tô để vận chuyển hàng hoá... Trong một số bài toán, chẳng hạn bài toán vận tải với các lượng hàng cung và cầu là các số nguyên, song nhiều bài toán khác thì không phải như vậy. Vì thế trong chương này sẽ đề cập đến nội dung và phương pháp giải các bài toán tối ưu trên lưới các điểm nguyên hay trên các tập rời rạc, gọi tắt là bài toán quy hoạch rời rạc hay bài toán quy hoạch nguyên.

Bài toán quy hoạch rời rạc có dạng sau:

Tìm cực đại của hàm $f(x, y)$ phụ thuộc hai nhóm biến x và y với các ràng buộc có dạng:

$$g_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in D$$

trong đó, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_q)$, $p > 0$, $q \geq 0$, D là tập hữu hạn các véc tơ p -chiều, còn f , g_i là những hàm cho trước của n biến số ($n = p + q$).

Nếu f , g_i là các hàm tuyến tính và D là lưới các điểm nguyên, thì ta có bài toán quy hoạch nguyên tuyến tính, còn nếu D là tập các véc tơ p thành phần 0 hay 1 thì ta có bài toán quy hoạch nguyên 0-1.

Nếu $q = 0$, nghĩa là chỉ có các biến rời rạc x_1, x_2, \dots, x_p thì bài toán được gọi là *bài toán quy hoạch nguyên hoàn toàn*. Còn nếu $q > 0$ thì bài toán được gọi là *bài toán quy hoạch nguyên bộ phận*.

Chú ý

Sở dĩ bài toán quy hoạch rời rạc còn được gọi là bài toán quy hoạch nguyên là vì bất kỳ bài toán với các biến số chỉ nhận một số hữu hạn giá trị cho trước, đều có thể quy về bài toán trong đó các biến chỉ nhận các giá trị nguyên. Ví dụ, giả sử biến x biểu thị quy mô công suất của nhà máy điện cần xây dựng chỉ có thể lấy một trong các giá trị cho trước a_1, a_2, \dots, a_k (các quy mô công suất tiêu chuẩn). Khi đó bằng cách đặt:

$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k,$$

$$\text{với } u_1 + u_2 + \dots + u_k = 1, \quad u_j \in \{0; 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

thì biến rời rạc x có thể được thay thế bởi một số biến u_j chỉ nhận giá trị 0 hay 1, gọi tắt là biến 0-1 hay biến *Boolean*.

Tương tự, nếu $x \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ thì ta có thể viết

$$x = u_1 + u_2 + \dots + u_k, \quad u_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

nghĩa là bất kỳ bài toán với các biến nguyên bị chặn tùy ý, đều có thể quy về bài toán với các biến 0–1. Điều này cho thấy bài toán quy hoạch nguyên 0–1 giữ vai trò quan trọng trong quy hoạch rời rạc.

2. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ DẪN TỚI QUY HOẠCH RỜI RẠC

2.1. Bài toán vận tải

Có m kho hàng (điểm phát) chứa một loại hàng hoá, lượng hàng ở kho i là a_i và n nơi tiêu thụ (điểm thu), nhu cầu ở nơi thu là b_j , c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát i đến điểm thu j . Xác định các lượng hàng vận chuyển x_{ij} từ các điểm phát i tới các điểm thu j sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất và nhu cầu các điểm thu được thoả mãn.

Dạng toán học của bài toán là:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^m a_i &= \sum_{j=1}^n b_j. \end{aligned}$$

Nếu các a_i và b_j là nguyên thì đa diện lồi xác định bởi các ràng buộc của bài toán có mọi đỉnh đều là nguyên. Do đó ta có thể dùng phương pháp đơn hình để giải bài toán quy hoạch tuyến tính này, lời giải cuối cùng nhận được sẽ là một phương án nguyên.

Ví dụ. Xét bài toán vận tải có 3 điểm phát và 4 điểm thu với ma trận chi phí như sau:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_i = (10, 25, 15), \quad b_j = (5, 15, 20, 10)$$

Đáp số: trị tối ưu hàm mục tiêu là 115, phương án vận chuyển tối ưu là: $x[1,3]=10$, $x[2,2]=15$, $x[2,3]=10$, $x[3,1]=5$, $x[3,4]=10$

2.2. Bài toán phân việc

Có n đơn vị sản xuất cần sản xuất n loại sản phẩm, c_{ij} là chi phí cho đơn vị i sản xuất sản phẩm j . Hãy phân công mỗi đơn vị sản xuất một sản phẩm để tổng chi phí là nhỏ nhất.

Dạng toán học của bài toán là:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Ví dụ có 4 đơn vị sản xuất 4 loại sản phẩm với ma trận chi phí sau:

100000	4000000	800000	550000
200000	3500000	750000	500000
400000	2000000	700000	400000
300000	5000000	600000	450000

Đáp số: trị tối ưu hàm mục tiêu là 3200000 đồng, phương án tối ưu là: $x[1,1]=x[2,4]=x[3,2]=x[4,3]=1$.

2.3. Bài toán cái túi

Có một cái túi chứa được nhiều nhất một trọng lượng là b , có n đồ vật cần mang, đồ vật j nặng a_j , giá trị của nó là c_j . Bài toán đặt ra là cho những đồ vật nào vào túi để tổng giá trị của nó lớn nhất. Ký hiệu x_j là số đồ vật j được đưa vào túi. Dạng toán học của bài toán là:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in Z \end{aligned}$$

Ví dụ. Có một cái túi chứa được nhiều nhất là 62 kg, có 10 đồ vật cần mang

$$\begin{aligned} 30x_1 + 19x_2 + 13x_3 + 38x_4 + 20x_5 + 6x_6 + 8x_7 + 19x_8 + 10x_9 + 11x_{10} &\rightarrow \max \\ 15x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 27x_4 + 15x_5 + 5x_6 + 8x_7 + 20x_8 + 12x_9 + 15x_{10} &\leq 62 \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, 10 \end{aligned}$$

Đáp số: trị tối ưu hàm mục tiêu là 95, phương án tối ưu là (1,1,0,1,0,0,1,0,0,0)

2.4. Bài toán xếp hàng lên tàu

Một tàu chở hàng có trọng tải T và thể tích K , tàu chở n loại hàng, hàng loại j có số lượng là s_j , có trọng lượng là a_j , thể tích b_j và giá trị sử dụng là c_j . Bài toán đặt ra là cần xác định số lượng hàng loại j cần xếp lên tàu x_j để tổng giá trị hàng hoá trên tàu là lớn nhất.

Dạng toán học của bài toán là:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq T \\ \sum_{j=1}^n b_j x_j &\leq K \\ x_j &\in \{0, 1, 2, \dots, s_j\}, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Ở đây, không giảm tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử các hệ số T, K, a_j, b_j, c_j (với mọi j) đều là các số dương.

2.5. Bài toán xếp hàng vào các công ten nơ rỗng cùng loại

Có n loại hàng hoá cần được xếp lên các công ten nơ rỗng như nhau với tải trọng của mỗi công ten nơ là T và dung lượng là K . Hàng hoá loại j có trọng lượng a_j , khối lượng b_j và số lượng cần vận chuyển là s_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Hãy tìm cách xếp tất cả số hàng hoá này lên công ten nơ sao cho dùng ít công ten nơ nhất?

Giả sử ta đã biết được m là số công ten nơ tối đa cần thiết để chở hết số hàng hoá trên. Chẳng hạn, số m có thể tìm theo cách: xếp dần các đồ vật lên công ten nơ theo thứ tự tùy ý, cái nọ tiếp cái kia, cho đến khi trọng lượng hay dung tích của công ten nơ đã dùng hết. Tiếp đó sử dụng công ten nơ tiếp theo...

Gọi x_{ij} là số đồ vật j được chở trên công ten nơ i , y_i là biến nhận giá trị 0 hay 1 tùy theo có dùng công ten nơ i hay không.

Dạng toán học của bài toán là:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_i &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_j x_{ij} &\leq T y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n b_j x_{ij} &\leq K y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= s_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\in \{0, 1, 2, \dots, s_j\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n \\ y_i &\in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Hai nhóm ràng buộc đầu biểu thị yêu cầu không chuyên chở quá tải trọng và dung lượng của mỗi công ten nơ được sử dụng ($y_i = 1$), còn công ten nơ không sử dụng ($y_i = 0$) cần phải rỗng. Nhóm ràng buộc thứ ba biểu thị mọi đồ vật cần được xếp vào các công ten nơ.

2.6. Bài toán người du lịch

Cho đồ thị $G = (V, E)$, V là tập n đỉnh, E là tập n cạnh. Gọi c_{ij} là độ dài của cung nối từ đỉnh i đến đỉnh j , có thể $c_{ij} \neq c_{ji}$ và $c_{ii} = \infty$ với mọi i . Một chu trình Hamilton là một chu trình sơ cấp mà nó tương đương với việc xuất phát từ một đỉnh bất kỳ cho trước, đi qua mọi đỉnh khác đúng một lần và trở lại đỉnh xuất phát. Tổng khoảng cách trên các cạnh trong hành trình đó là độ dài của hành trình đó. Mục tiêu của bài toán người du lịch là tìm chu trình Hamilton có độ dài ngắn nhất.

Đặt $x_{ij} = 1$ nếu cung (i, j) được chọn và bằng 0 nếu trái lại. Dạng toán học của bài toán là:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ u_i - u_j + nx_{ij} &\leq n - 1, \quad 2 \leq i \neq j \leq n \end{aligned}$$

trong đó u_i nhận giá trị nguyên hay thực.

Hai tập ràng buộc đầu biểu thị mỗi thành phố được thăm đúng một lần. Ràng buộc cuối đưa vào để mỗi hành trình của bài toán chỉ chứa duy nhất một chu trình.

Bài toán người du lịch là một bài toán rất quen thuộc và nổi tiếng trong tối ưu rời rạc. Tuy số phương án của bài toán là hữu hạn (bằng $n!$ đối với bài toán có n thành phố) nhưng với n cỡ hàng ngàn trở lên thì số phương án này cực kỳ lớn, vì thế cách duyệt toàn bộ là không thể thực hiện được, mặc dầu có sự trợ giúp của các máy tính cực mạnh. Little J.D, Murty K.G, Sweeney D.W và Karel C 1963 là những người đầu tiên sử dụng thành công phương pháp nhánh cận để giải bài toán người du lịch và cho đến nay phương pháp này với nhiều cải tiến khác nhau vẫn là công cụ chủ yếu để giải quyết bài toán đề ra.

2.7. Bài toán với chi phí cố định

Xét bài toán tối ưu có dạng sau:

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \right\}$$

trong đó $D \subset R_+^n$ là một tập lồi đóng và:

$$f_j(x_j) = \begin{cases} d_j + c_j x_j & \text{khi } x_j > 0 \\ 0 & \text{khi } x_j = 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Giả thiết $d_j > 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$. Các số d_j thường được hiểu là các chi phí cố định cần thiết để đưa phương thức sản xuất j vào hoạt động, nó không phụ thuộc vào cường độ sử dụng của phương thức này (x_j).

Giả sử đã biết p_j là cận trên của biến (x_j), tức là:

$$p_j \geq \max \{x_j : x \in D\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Khi đó ta có thể đưa bài toán trên về bài toán tương đương với nó dạng:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (c_j x_j + d_j y_j) &\rightarrow \min \\ x \in D, 0 \leq x_j \leq p_j y_j, \quad y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

2.8. Bài toán với ràng buộc dạng lựa chọn

Cho hai hàm số $g(x)$ và $h(x)$ bị chặn trên trên tập hợp D . Nếu ta đòi hỏi phải có hoặc $g(x) \leq 0$ hoặc $h(x) \leq 0$ với mọi $x \in D$, thì điều này có thể diễn đạt bằng cách đưa thêm vào một biến số nhận giá trị 0-1. Ký hiệu u_g và u_h là các cận trên của hàm $g(x)$ và $h(x)$ trên tập D ($g(x) \leq u_g, h(x) \leq u_h, \forall x \in D$). Khi đó điều kiện trên sẽ được thoả mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} g(x) \leq u_g \delta \\ h(x) \leq u_h (1 - \delta) \\ \delta \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Điều kiện bù trong quy hoạch toàn phương

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j = 0 \quad (\text{với } x_j \geq 0, y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n)$$

có thể thay thế bằng n cặp ràng buộc dạng lựa chọn:

$$x_j \leq 0 \text{ hay } y_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{với } x_j \geq 0, y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n).$$

Giả sử đã biết cận trên p_j của biến x_j và cận trên q_j của biến y_j . Khi đó bằng cách đưa vào các biến z_j nhận giá trị 0-1, ta có thể đưa n cặp ràng buộc dạng lựa chọn nói trên về dạng:

$$x_j \leq p_j z_j, \quad y_j \leq q_j (1 - z_j), \quad z_j \in \{0, 1\} \quad (\text{với } x_j \geq 0, y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n).$$

Ví dụ 2. Khi quyết định phương thức sản xuất sản phẩm mới ta thường gặp tình huống sau: hoặc là không sản xuất sản phẩm j ($x_j = 0$), hoặc là nếu chấp nhận sản xuất nó thì phải sản xuất với số lượng không ít hơn d_j ($x_j \geq d_j$), với d_j là số lượng sản phẩm loại j tối thiểu cần sản xuất để bù lại được các chi phí cần bỏ ra khi đưa phương