Bài toán đặt không chỉnh

Phạm Kỳ Anh

NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2007, 222 tr.

Từ khoá: Bài toán đặt không chỉnh, Phương pháp hiệu chỉnh, Bài toán phi tuyến, Bài toán tuyến tính, Phương pháp chon, Phương pháp tựa nghiệm, phương trình xấp xỉ, Phương pháp tựa nghịch đảo.

Mục lục

Lời nói đầu

Nhiều vấn đề khoa học, công nghệ, kinh tế, sinh thái, v.v... dẫn đến việc giải các bài toán mà nghiệm của chúng không ổn định theo dữ kiện ban đầu, tức là một thay đổi nhỏ (sai một ly) của các dữ liệu có thể dẫn đến sự sai khác rất lớn (đi một dặm) của nghiệm, thậm chí làm cho bài toán trở nên vô nghiệm hoặc vô định. Người ta nói những bài toán đó đặt không chỉnh.

Do các số liệu thường được thu nhập bằng thực nghiệm (đo đạc, quan trắc,...) và sau đó lại được xử lý trên máy tính nên chúng không tránh khỏi sai số. Chính vì thế, ta cần phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh, sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát.

Những người có công đặt nền móng cho lý thuyết bài toán không chỉnh là Tikhonov A.N., Lavrantiev M.M, Lions J.J., Ivanov V.K.,...

Do tầm quan trọng đặc biệt của lý thuyết này mà nhiều nhà toán học đã dành phần lớn thời gian và công sức của mình cho việc nghiên cứu các phương pháp giải bài toán không chỉnh, điển hình là: Alber Ya.I., Atkinson K.E., Bakushinskii A.B., Baumeiser J., Engl H.W., Gilbert F., Glasko V.B., Goncharskii A.V., Gorenflo R., Groetsch C.W., Hanke M., Hofmann B., Kirsch A., Landweber L., Louis A.K., Morozov V.A., Nashed M.Z., Natterer F., Neubauer A., Vainikko G.M. ...

Một số nhà toán học Việt nam cũng đi sâu nghiên cứu và có nhiều đóng góp cho lý thuyết cũng như ứng dụng các bài toán không chỉnh như: Đặng Đình Ang, Đinh Nho Hào, Đặng Đức Trọng, vv... hoặc quan tâm và có công trình liên quan đến lý thuyết trên như: Nguyễn Minh Chương, Trần Đức

Vân, Vũ Xuân Minh, ... cùng các tác giả của giáo trình này.

Thời gian gần đây, đã có nhiều giáo trình về bài toán không chỉnh bằng tiếng nước ngoài. Tuy nhiên chưa có một tài liệu nào được viết hoặc dịch ra tiếng Việt.

Nhằm phục vụ các đối tượng là sinh viên đại học năm cuối, học viên cao học, nghiên cứu sinh cũng như các nhà khoa học quan tâm đến ứng dụng của lý thuyết bài toán không chỉnh, chúng tôi đã biên soạn giáo trình này.

Nội dung của cuốn sách được lựa chọn theo ý đồ và "khẩu vị" riêng của các tác giả, vì vậy nó không thể phản ánh được hết các khía cạnh vốn dĩ rất đa dạng của lý thuyết bài toán không chỉnh.

Do điều kiện, thời gian và trình độ có hạn giáo trình này không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong các vị độc giả gần xa góp ý và lượng thứ.

Các tác giả

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Chương này giới thiệu một số khái niệm cơ bản liên quan đến bài toán đặt không chỉnh gọi tắt là bài toán không chỉnh. Các ví dụ về bài toán không chỉnh được xét trong mục 1.1. Mục 1.2 nhắc lại một số kiến thức về giải tích hàm dùng trong các chương sau. Trong mục 1.3 trình bày phương pháp tìm nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính ít được đề cập ở các giáo trình về giải tích số thông thường trong các trường đại học kỹ thuật. Khái niệm tổng quát về bài toán không chỉnh được trình bày trong mục 1.4.

1.1 Ví dụ về bài toán không chỉnh

• Nhiều bài toán thực tế đươc quy về giải hệ đại số tuyến tính, trong đó một sự thay đổi nhỏ hệ số của hệ phương trình ban đầu dẫn đến thay đổi lớn nghiệm của hệ, thậm chí làm cho hệ trở nên vô nghiệm hoặc vô định. Những hệ phương trình đại số tuyến tính có tính chất như vầy được gọi là hệ phương trình điều kiện xấu. Ma trận A tạo bởi hệ số của hệ phương trình này được gọi là ma trận điều kiện xấu. Khi đó định thức của ma trận A, kí hiệu lá $\det A$, có giá trị tuyệt đối tương đối nhỏ.

Ví dụ 1.1. *Hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2, \\ 2x_1 + 1.01x_2 & = 2.01, \end{cases}$$

có nghiệm là $x_1 = 1/2$ và $x_2 = 1$, trong khi đó hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2, \\ 2.01x_1 + x_2 & = 2.05, \end{cases}$$

có nghiệm là $x_1 = 5$ và $x_2 = -8$. Ta thấy một thay đổi nhỏ của hệ số và vế phải của phương trình thứ hai kéo theo những thay đổi đáng kể của nghiệm. Như vậy, hệ phương trình này là một hệ điều kiện xấu.

Ví dụ 1.2. *Ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} -73 & 78 & 24 \\ 92 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10 \end{bmatrix}$$

là một ma trận điều kiện xấu với $\det A = 1$. Chỉ thay đổi một lượng nhỏ ở các thành phần $a_{12},\ a_{21}$ hoặc a_{33} của ma trận A, thì giá trị của $\det A$ nhận những giá trị rất khác nhau:

$$\det \begin{bmatrix} -73 & 78.01 & 24 \\ 92 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10 \end{bmatrix} \approx -28.199999003,$$

$$\det \begin{bmatrix} -73 & 78 & 24 \\ 92.01 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10 \end{bmatrix} \approx 2.0800007556$$

và

$$\det \begin{bmatrix} -73 & 78 & 24 \\ 92 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10.01 \end{bmatrix} \approx -118.93999938.$$

Một câu hỏi quan trọng đặt ra là làm thế nào để nhận biết và giải hệ phương trình đại số tuyến tính với ma trận hệ số điều kiện xấu?

• Bây giờ xét bài toán tìm đạo hàm của một hàm số. Giả sử hàm $y = f(x)$ có đạo hàm. Ta cần tính đạo hàm bằng số

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tại điểm x. Muốn vậy, thông thường bằng cách chọn dãy $\{h_k\}$ sao cho $h_k \to 0$ khi $k \to \infty$ và tính tỷ sai phân

$$D_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}, \ k = 0, 1, ..., N.$$

Khi đó, ta có thể nghĩ rằng với N đủ lớn, tức h_N đủ nhỏ, D_N sẽ là xấp xỉ tốt của $f'(x)$. Vậy thì với h_N nhỏ bao nhiêu ta sẽ nhận được xấp xỉ tốt. Liệu h_N càng nhỏ có cho ta xấp xỉ càng tốt hay không? Để trả lời cho câu hỏi đó ta xét ví dụ sau. Cho hàm số $f(x) = exp(x)$, tính đạo hàm $f'(1)$ với $h_k = 10^{-k}$ ta có bảng kết quả

k	h_k	$f_k = f(1+h_k)$	$f_k - e$	$D_k = \frac{f_k - e}{h_k}$

1	0.1	3.0041660	0.285884196	2.858841560
2	0.01	2.7456011	0.027319187	2.731918700
3	10^{-3}	2.7210014	0.002719642	2.719642000
4	10^{-4}	2.7185536	0.000271842	2.718420000
5	10^{-5}	2.7183090	0.000027183	2.718300000
6	10^{-6}	2.7182845	0.000002719	2.719000000
7	10^{-7}	2.7182827	0.000000272	2.720000000
8	10^{-8}	2.7182818	0.000000028	2.800000000
9	10^{-9}	2.7182818	0.000000003	3.000000000
10	10^{-10}	2.7182818	0.000000000	0.000000000

Bảng trên cho ta thấy nếu $k = 10$, thì $D_k = 0$. Trong khi đó $f'(1) \approx 2.718282$. Như vậy khi $k = 5$ tỷ sai phân cho ta xấp xỉ tốt hơn cả. Điều đó nói lên rằng D_k tiến gần tới $f'(x)$ ở một thời khắc nào đó sau lại rời xa khỏi nó. Cũng ở ví dụ trên ta thấy $0.0007 = |D_6 - D_5| \geq |D_5 - D_4| = 0.00012$. Quan sát này gợi ý cho ta nên tính D_k đến lúc $|D_{N+1} - D_N| \geq |D_N - D_{N-1}|$ thì thôi.

• Xét phương trình tích phân Fredholm loại I

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds = f_0(t), \qquad t \in [c,d], \tag{1.1}$$

ở đây nghiệm là một hàm $\varphi(s)$, vế phải $f_0(t)$ là một hàm số cho trước và hạch $K(t,s)$ của tích phân cùng với $\partial K/\partial t$ được giả thiết là các hàm liên tục. Ta giả thiết nghiệm $\varphi(s)$ thuộc lớp các hàm liên tục trên $[a,b]$ với khoảng cách (còn được gọi là độ lệch) giữa hai hàm φ_1 và φ_2 trong lớp đó là

$$\rho_{C[a,b]}(\varphi_1,\varphi_2) = \max_{s\in[a,b]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|.$$

Sự thay đổi vế phải được đo bằng độ lệch trong không gian $L_2[c,d]$, tức là khoảng cách giữa hai hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$ trong $L_2[c,d]$ được biểu thị bởi số

$$\rho_{L_2[c,d]}(f_1,f_2) = \left\{\int_c^d |f_1(t) - f_2(t)|^2 dt\right\}^{1/2}.$$

Giả sử phương trình (1.1) có nghiệm $\varphi_0(s)$. Khi đó với vế phải

$$f_1(t) = f_0(t) + N \int_a^b K(t,s)\sin(\omega s)ds,$$

(1.1) có nghiệm

$$\varphi_1(s) = \varphi_0(s) + N\sin(\omega s).$$

Với N bất kỳ và ω đủ lớn, thì khoảng cách giữa hai hàm f_0 và f_1 trong $L_2[c,d]$

$$\rho_{L_2[c,d]}(f_0, f_1) = |N| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(t,s)\sin(\omega s)ds \right]^2 dt \right\}^{1/2}$$

có thể làm nhỏ tuỳ ý. Thật vậy, đặt

$$K_{\max} = \max_{s\in[a,b], t\in[c,d]} \big|K(t,s)\big|,$$

ta tính được

$$\begin{aligned}\rho_{L_2[c,d]}(f_0, f_1) &\le |N| \left\{ \int_c^d \left[K_{\max}\frac{1}{\omega}\cos(\omega s)\Big|_a^b \right]^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\le \frac{|N| K_{\max} c_0}{\omega},\end{aligned}$$

ở đây c_0 là một hằng số dương. Ta chọn N và ω lớn tuỳ ý, nhưng N/ω lại nhỏ. Khi đó,

$$\rho_{C[a,b]}(\varphi_0, \varphi_1) = \max_{s\in[a,b]} |\varphi_0(s) - \varphi_1(s)| = |N|$$

có thể lớn bất kỳ.

Khoảng cách giữa hai nghiệm φ_0 và φ_1 trong $L_2[a,b]$ cũng có thể lớn bất kỳ. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\rho_{L_2[a,b]}(\varphi_0, \varphi_1) = \left\{ \int_a^b |\varphi_0(s) - \varphi_1(s)|^2 ds \right\}^{1/2} &= |N| \left\{ \int_a^b \sin^2(\omega s) ds \right\}^{1/2} \\ &= |N| \sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega}\sin(\omega(b-a))\cos(\omega(b+a))}.\end{aligned}$$

Dễ dàng nhận thấy hai số N và ω có thể chọn sao cho $\rho_{L_2[c,d]}(f_0, f_1)$ rất nhỏ nhưng vẫn cho kết quả $\rho_{L_2[a,b]}(\varphi_0, \varphi_1)$ rất lớn.