Chỉ đạo biên soạn:

VỤ KHOA HỌC VÀ ĐÀO TẠO – BỘ Y TẾ

Chủ biên:

TS. HOÀNG MINH HẰNG

Những người biên soạn:

TS. HOÀNG MINH HẰNG
ThS. NGÔ BÍCH NGUYỆT
CN. CAO CHU TOÀN

Thư ký biên soạn:

ThS. NGÔ BÍCH NGUYỆT

Tham gia tổ chức bản thảo:

ThS. PHÍ VĂN THÂM
TS. NGUYỄN MẠNH PHA

04 – 2009/CXB/527 – 2117/GD Mã số : 7K783y9 – DAI

Lời giới thiệu

*Thực hiện một số điều của Luật Giáo dục, Bộ Giáo dục & Đào tạo và Bộ Y tế đã ban hành chương trình khung đào tạo **Bác sĩ đa khoa**. Bộ Y tế tổ chức biên soạn tài liệu dạy – học các môn cơ sở và chuyên môn theo chương trình trên nhằm từng bước xây dựng bộ sách đạt chuẩn chuyên môn trong công tác đào tạo nhân lực y tế.*

Sách TOÁM CAO CẤP được biên soạn dựa vào chương trình giáo dục của Trường Đại học Y Hà Nội trên cơ sở chương trình khung đã được phê duyệt. Sách được các tác giả TS. Hoàng Minh Hằng, ThS. Ngô Bích Nguyệt, CN. Cao Chu Toàn biên soạn theo phương châm: kiến thức cơ bản, hệ thống; nội dung chính xác, khoa học, cập nhật các tiến bộ khoa học, kỹ thuật hiện đại và thực tiễn Việt Nam.

Sách TOÁN CAO CẤP đã được Hội đồng chuyên môn thẩm định sách và tài liệu dạy – học chuyên ngành Bác sĩ đa khoa của Bộ Y tế thẩm định năm 2007. Bộ Y tế quyết định ban hành là tài liệu dạy – học đạt chuẩn chuyên môn của ngành trong giai đoạn hiện nay. Trong thời gian từ 3 đến 5 năm, sách phải được chỉnh lý, bổ sung và cập nhật.

Bộ Y tế xin chân thành cảm ơn các tác giả và Hội đồng chuyên môn thẩm định đã giúp hoàn thành cuốn sách; Cảm ơn ThS. Nguyễn Phan Dũng, TS. Chu Văn Thọ đã đọc và phản biện để cuốn sách sớm hoàn thành kịp thời phục vụ cho công tác đào tạo nhân lực y tế.

Lần đầu xuất bản sách khó tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của đồng nghiệp, các bạn sinh viên và các độc giả để lần xuất bản sau sách được hoàn thiện hơn.

VỤ KHOA HỌC VÀ ĐÀO TẠO – BỘ Y TẾ

Lời nói đầu

Toán học là môn khoa học tự nhiên có mặt trong rất nhiều lĩnh vực khoa học, bao gồm cả trong lĩnh vực nghiên cứu sinh, y học.

Trong khuôn khổ chuyên ngành y, bộ môn Toán – Trường Đại học Y Hà Nội đã giảng dạy Toán cao cấp trong nhiều năm cho sinh viên với mong muốn cung cấp các kiến thức cơ bản, cơ sở Toán thống kê cho các nghiên cứu ứng dụng sau này.

Cuốn sách bao gồm các kiến thức về đại số, giải tích và một số bài toán ứng dụng trong sinh, y học với thời lượng 45 tiết.

Cuốn sách là tài liệu dành cho sinh viên trường y và sinh viên các chuyên ngành ứng dụng sinh, y học khác và có thể làm tài liệu tham khảo cho các cán bộ giảng dạy và nghiên cứu trong lĩnh vực sinh, y học.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của CN. Đỗ Như Cương, TS. Đặng Đức Hậu nguyên Trưởng bộ môn Toán – Trường Đại học Y Hà Nội. Ngoài ra, chúng tôi cũng nhận được sự đóng góp ý kiến và giúp đỡ về kỹ thuật vi tính của các đồng nghiệp trong bộ môn. Tuy nhiên cuốn sách khó tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc và đồng nghiệp.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chương III. TÍCH PHÂN

Chương IV. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN – PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ỨNG DỤNG

Chương I
MA TRẬN – ĐỊNH THỨC
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1
MA TRẬN

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa ma trận và khái niệm các dạng ma trận.

2. Thực hiện được các phép toán trên ma trận.

1. KHÁI NIỆM MA TRẬN

Khi có m × n số ta có thể xếp thành một bảng chữ nhật gồm m hàng và n cột.

1.1. Định nghĩa

Một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột biểu diễn dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là *ma trận* cỡ m × n, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử nằm ở hàng i, cột j.

Ký hiệu là $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Ví dụ:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2 × 3;

2) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ là ma trận cột cỡ 3×1;

3) $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận hàng cỡ 1×3.

Khi $m = n$ thì A được gọi là *ma trận vuông* cấp n.

1.2. Ma trận không

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng không.

Ký hiệu là $O = [0]_{m \times n}$.

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cỡ 2×4.

Các ma trận không chỉ khác nhau về kích thước.

1.3. Ma trận bằng nhau

Ma trận A và B được gọi là hai ma trận *bằng nhau* nếu chúng có cùng cỡ và có các phần tử ở cùng vị trí bằng nhau. Tức là:

$$\begin{cases} 1)\ A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}; \\ 2)\ a_{ij} = b_{ij} \text{ với } \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $A = B$ khi và chỉ khi $a = 1$; $b = -3$; $c = 2$; $d = 3$.

1.4. Ma trận đối nhau

Ma trận A và B được gọi là hai ma trận *đối nhau* nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí có giá trị đối nhau.

Ma trận đối của A được ký hiệu là $-A$. Ta có:

$$\begin{cases} 1)\ A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}; \\ 2)\ a_{ij} = -b_{ij} \text{ với } \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow B = -A \text{ hay } A = -B.$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $B = -A$ khi và chỉ khi $a = -1$; $b = -3$; $c = 2$; $d = 4$.

1.5. Ma trận tam giác

Cho ma trận vuông cấp n có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ gọi là *đường chéo chính* của ma trận A.

Các phần tử a_{ij} với $i = j$ gọi là *phần tử chéo*.

Ma trận tam giác là ma trận mà tất cả các phần tử ở phía trên hoặc phía dưới của đường chéo chính đều bằng không. Có hai loại ma trận tam giác là ma trận *tam giác trên* và ma trận *tam giác dưới*.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác trên.}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác dưới.}$$

1.6. Ma trận đường chéo

Cho ma trận vuông cấp n có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nếu $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{nếu } i = j \\ 0, & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$ thì A là *ma trận đường chéo*.

Vậy A có dạng: