

Chỉ đạo biên soạn:

VỤ KHOA HỌC VÀ ĐÀO TẠO – BỘ Y TẾ

Chủ biên:

TS. HOÀNG MINH HẰNG

Những người biên soạn:

TS. HOÀNG MINH HẰNG

ThS. NGÔ BÍCH NGUYỆT

CN. CAO CHU TOÀN

Thư ký biên soạn:

ThS. NGÔ BÍCH NGUYỆT

Tham gia tổ chức bản thảo:

ThS. PHÍ VĂN THÂM

TS. NGUYỄN MẠNH PHA

Lời giới thiệu

Thực hiện một số điều của Luật Giáo dục, Bộ Giáo dục & Đào tạo và Bộ Y tế đã ban hành chương trình khung đào tạo **Bác sĩ đa khoa**. Bộ Y tế tổ chức biên soạn tài liệu dạy – học các môn cơ sở và chuyên môn theo chương trình trên nhằm từng bước xây dựng bộ sách đạt chuẩn chuyên môn trong công tác đào tạo nhân lực y tế.

Sách **TOÁN CAO CẤP** được biên soạn dựa vào chương trình giáo dục của Trường Đại học Y Hà Nội trên cơ sở chương trình khung đã được phê duyệt. Sách được các tác giả TS. Hoàng Minh Hằng, ThS. Ngô Bích Nguyệt, CN. Cao Chu Toàn biên soạn theo phương châm: kiến thức cơ bản, hệ thống; nội dung chính xác, khoa học, cập nhật các tiến bộ khoa học, kỹ thuật hiện đại và thực tiễn Việt Nam.

Sách **TOÁN CAO CẤP** đã được Hội đồng chuyên môn thẩm định sách và tài liệu dạy – học chuyên ngành Bác sĩ đa khoa của Bộ Y tế thẩm định năm 2007. Bộ Y tế quyết định ban hành là tài liệu dạy – học đạt chuẩn chuyên môn của ngành trong giai đoạn hiện nay. Trong thời gian từ 3 đến 5 năm, sách phải được chỉnh lý, bổ sung và cập nhật.

Bộ Y tế xin chân thành cảm ơn các tác giả và Hội đồng chuyên môn thẩm định đã giúp hoàn thành cuốn sách; Cảm ơn ThS. Nguyễn Phan Dũng, TS. Chu Văn Thọ đã đọc và phản biện để cuốn sách sớm hoàn thành kịp thời phục vụ cho công tác đào tạo nhân lực y tế.

Lần đầu xuất bản sách khó tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của đồng nghiệp, các bạn sinh viên và các độc giả để lần xuất bản sau sách được hoàn thiện hơn.

VỤ KHOA HỌC VÀ ĐÀO TẠO – BỘ Y TẾ

Lời nói đầu

Toán học là môn khoa học tự nhiên có mặt trong rất nhiều lĩnh vực khoa học, bao gồm cả trong lĩnh vực nghiên cứu sinh, y học.

Trong khuôn khổ chuyên ngành y, bộ môn Toán – Trường Đại học Y Hà Nội đã giảng dạy Toán cao cấp trong nhiều năm cho sinh viên với mong muốn cung cấp các kiến thức cơ bản, cơ sở Toán thống kê cho các nghiên cứu ứng dụng sau này.

Cuốn sách bao gồm các kiến thức về đại số, giải tích và một số bài toán ứng dụng trong sinh, y học với thời lượng 45 tiết.

Cuốn sách là tài liệu dành cho sinh viên trường y và sinh viên các chuyên ngành ứng dụng sinh, y học khác và có thể làm tài liệu tham khảo cho các cán bộ giảng dạy và nghiên cứu trong lĩnh vực sinh, y học.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của CN. Đỗ Như Cường, TS. Đặng Đức Hậu nguyên Trưởng bộ môn Toán – Trường Đại học Y Hà Nội. Ngoài ra, chúng tôi cũng nhận được sự đóng góp ý kiến và giúp đỡ về kỹ thuật vi tính của các đồng nghiệp trong bộ môn. Tuy nhiên cuốn sách khó tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc và đồng nghiệp.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

| | <i>Trang</i> |
|--|--------------|
| LỜI GIỚI THIỆU | 3 |
| LỜI NÓI ĐẦU | 5 |
| Chương I. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH | |
| Bài 1. Ma trận | 9 |
| 1. Khái niệm ma trận | 9 |
| 2. Phép toán trên ma trận | 12 |
| Bài tập lượng giá | 17 |
| Bài 2. Định thức | 19 |
| 1. Định thức | 19 |
| 2. Tính chất | 21 |
| 3. Ma trận nghịch đảo | 29 |
| 4. Các phương pháp tính định thức | 31 |
| Bài tập lượng giá | 37 |
| Bài 3. Hệ phương trình tuyến tính | 39 |
| 1. Khái niệm hạng của ma trận | 39 |
| 2. Hệ phương trình tuyến tính | 42 |
| 3. Điều kiện để hệ phương trình tuyến tính tổng quát có nghiệm | 44 |
| 4. Phương pháp trụ xoay Gauss | 51 |
| Bài tập lượng giá | 54 |
| Chương II. HÀM SỐ, ĐẠO HÀM, VI PHÂN – ỨNG DỤNG | |
| Bài 1. Hàm số | 56 |
| 1. Định nghĩa | 56 |
| 2. Hàm ngược, đồ thị của hàm ngược | 57 |
| 3. Hàm số sơ cấp cơ bản, hàm số sơ cấp | 60 |
| Bài tập lượng giá | 62 |
| Bài 2. Đạo Hàm và vi phân..... | 64 |
| 1. Định nghĩa đạo hàm | 64 |
| 2. Đạo hàm cấp cao | 72 |
| 3. Vi phân | 75 |
| Bài tập lượng giá | 79 |
| Bài 3. Một số tính chất của hàm khả vi..... | 82 |
| 1. Định lý Ferma | 82 |

| | | |
|--------|---|-----|
| | 2. Định lý Rolle | 83 |
| | 3. Định lý Lagrange | 84 |
| | 4. Định lý Cauchy | 84 |
| | 5. Định lý Taylor (công thức Taylor) | 86 |
| | 6. Định lý L'Hospital | 93 |
| | Bài tập lượng giá | 97 |
| Bài 4. | Hàm hai biến – Phương pháp bình phương bé nhất..... | 99 |
| | 1. Hàm hai biến | 99 |
| | 2. Phương pháp bình phương bé nhất | 105 |
| | Bài tập lượng giá | 119 |

Chương III. TÍCH PHÂN

| | | |
|--------|--|-----|
| Bài 1. | Tích phân bất định | 121 |
| | 1. Nguyên hàm và tích phân bất định | 121 |
| | 2. Các phương pháp tính tích phân | 124 |
| | 3. Tích phân các phân thức hữu tỷ | 128 |
| | 4. Tích phân một số hàm lượng giác | 137 |
| | 5. Tích phân một số hàm vô tỷ | 142 |
| | Bài tập lượng giá | 147 |
| Bài 2. | Tích phân xác định | 149 |
| | 1. Tích phân xác định | 149 |
| | 2. Công thức Newton – Leibnitz | 155 |
| | 3. Các phương pháp tính tích phân xác định | 158 |
| | 4. Tính gần đúng tích phân xác định | 162 |
| | Bài tập lượng giá | 168 |
| Bài 3. | Tích phân suy rộng | 170 |
| | 1. Khoảng lấy tích phân là vô hạn | 170 |
| | 2. Hàm dưới dấu tích phân có điểm gián đoạn vô cực trong khoảng lấy tích phân | 174 |
| | Bài tập lượng giá | 177 |

Chương IV. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN – PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ỨNG DỤNG

| | | |
|--------|---|-----|
| | Khái niệm mở đầu | 178 |
| | 1. Bài toán đưa đến phương trình vi phân | 178 |
| | 2. Định nghĩa phương trình vi phân | 179 |
| Bài 1. | Phương trình vi phân cấp 1..... | 180 |
| | 1. Tổng quát về phương trình vi phân cấp 1..... | 180 |
| | 2. Phương trình khuyết | 182 |
| | 3. Phương trình vi phân có biến phân ly..... | 182 |

| | | |
|--------|---|-----|
| | 4. Phương trình đẳng cấp cấp 1..... | 184 |
| | 5. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 | 186 |
| | 6. Phương trình Becnuli | 189 |
| | Bài tập lượng giá | 191 |
| Bài 2. | Phương trình vi phân cấp 2..... | 192 |
| | 1. Tổng quát về phương trình vi phân cấp hai..... | 192 |
| | 2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 | 194 |
| | 3. Phương trình tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi | 198 |
| | Bài tập lượng giá | 203 |
| Bài 3. | Phương trình vi phân ứng dụng..... | 205 |
| | 1. Phương trình phát triển vi khuẩn (hoặc tế bào) | 205 |
| | 2. Phương trình phát triển dịch..... | 207 |
| | 3. Phương trình phát triển dân số của quần thể biệt lập..... | 210 |
| | 4. Phương trình phát triển dân số của quần thể không biệt lập | 216 |
| | 5. Các ví dụ | 222 |
| | Bài tập lượng giá | 225 |

BÀI TẬP

| | | |
|--------------------------|--|-----|
| Chương I. | Ma trận – định thức – hệ phương trình tuyến tính | 228 |
| Chương II. | Hàm số, đạo hàm, vi phân – ứng dụng | 231 |
| Chương III. | Tích phân..... | 235 |
| Chương IV. | Phương trình vi phân – phương trình vi phân ứng dụng | 238 |
| TÀI LIỆU THAM KHẢO | | 242 |

Chương I

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1

MA TRẬN

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa ma trận và khái niệm các dạng ma trận.
2. Thực hiện được các phép toán trên ma trận.

1. KHÁI NIỆM MA TRẬN

Khi có $m \times n$ số ta có thể xếp thành một bảng chữ nhật gồm m hàng và n cột.

1.1. Định nghĩa

Một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột biểu diễn dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận cỡ $m \times n$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử nằm ở hàng i , cột j .

Ký hiệu là $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Ví dụ:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2×3 ;

$$2) B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ là ma trận cột cỡ } 3 \times 1;$$

$$3) C = [4 \ 6 \ 7] \text{ là ma trận hàng cỡ } 1 \times 3.$$

Khi $m = n$ thì A được gọi là *ma trận vuông cấp n*.

1.2. Ma trận không

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng không.

Ký hiệu là $O = [0]_{m \times n}$.

$$\text{Ví dụ: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ là ma trận không cỡ } 2 \times 4.$$

Các ma trận không chỉ khác nhau về kích thước.

1.3. Ma trận bằng nhau

Ma trận A và B được gọi là hai ma trận *bằng nhau* nếu chúng có cùng cỡ và có các phần tử ở cùng vị trí bằng nhau. Tức là:

$$\begin{cases} 1) A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}; \\ 2) a_{ij} = b_{ij} \text{ với } \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$$

$$\text{Ví dụ: Cho } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. A = B \text{ khi và chỉ khi } a = 1; b = -3; \\ c = 2; d = 3.$$

1.4. Ma trận đối nhau

Ma trận A và B được gọi là hai ma trận *đối nhau* nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí có giá trị đối nhau.

Ma trận đối của A được ký hiệu là $-A$. Ta có:

$$\begin{cases} 1) A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}; \\ 2) a_{ij} = -b_{ij} \text{ với } \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow B = -A \text{ hay } A = -B.$$

$$\text{Ví dụ: Cho } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. B = -A \text{ khi và chỉ khi } a = -1; b = -3; \\ c = 2; d = 4.$$

1.5. Ma trận tam giác

Cho ma trận vuông cấp n có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ gọi là *đường chéo chính* của ma trận A .

Các phần tử a_{ij} với $i = j$ gọi là *phần tử chéo*.

Ma trận tam giác là ma trận mà tất cả các phần tử ở phía trên hoặc phía dưới của đường chéo chính đều bằng không. Có hai loại ma trận tam giác là ma trận *tam giác trên* và ma trận *tam giác dưới*.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác trên.}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác dưới.}$$

1.6. Ma trận đường chéo

Cho ma trận vuông cấp n có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nếu $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{nếu } i = j \\ 0, & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$ thì A là *ma trận đường chéo*.

Vậy A có dạng: