Nhắc lại Giới hạn – Đạo hàm – Vi phân

1. Các giới hạn đặc biệt:

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Hệ quả: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$ $\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1}$ $\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\frac{u(x)}{\sin u(x)}=1}$

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ x\in R}$

Hệ quả: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$

2. Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản và các hệ quả:

(c)’ = 0 (c là hằng số)	
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=u'.e^u$
$(a^x)'=a^x.\ln a$	$(a^u)'=a^u.\ln a\ .\ u'$
$(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x}$	$(\ln\lvert u\rvert)'=\frac{u'}{u}$
$(\log_a\lvert x\rvert')=\frac{1}{x.\ln a}$	$(\log_a\lvert u\rvert)'=\frac{u'}{u.\ln a}$
(sinx)’ = cosx	(sinu)’ = u’.cosu
$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$	$(tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u}=(1+tg^2u).u'$
$(\cot gx)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot g^2x)$	$(\cot gu)'=\frac{-u'}{\sin^2 u}=-(1+\cot g^2u).u'$

3. Vi phân:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a ; b) và có đạo hàm tại $x\in(a;b)$. Cho số gia Δx tại x sao cho $x+\Delta x\in(a;b)$. Ta gọi tích y’.Δx (hoặc f’(x).Δx) là vi phân của hàm số y = f(x) tại x, ký hiệu là dy (hoặc df(x)).

$$dy = y'.\Delta x \quad (\text{hoặc } df(x) = f'(x).\Delta x)$$

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số y = x, thì

$$dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$$

Vì vậy ta có: dy = y’dx (hoặc df(x) = f’(x)dx)

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

§Bài 1: NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa:

Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a ; b) nếu mọi x thuộc (a ; b), ta có: F'(x) = f(x).

Nếu thay cho khoảng (a ; b) là đoạn [a ; b] thì phải có thêm:

$$F'(a^+) = f(x) \text{ và } F'(b^-) = f(b)$$

2. Định lý:

Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a ; b) thì :

a/ Với mọi hằng số C, F(x) + C cũng là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng đó.

b/ Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a ; b) đều có thể viết dưới dạng: F(x) + C với C là một hằng số.

Người ta ký hiệu họ tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) là $\int f(x)dx$. Do đó viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Bổ đề: Nếu $F'(x) = 0$ trên khoảng (a ; b) thì F(x) không đổi trên khoảng đó.

3. Các tính chất của nguyên hàm:

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a \neq 0)$
- $\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C = F(u) + C \quad (u = u(x))$

4. Sự tồn tại nguyên hàm:

- ***Định lý***: Mọi hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a ; b] đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của các hàm số hợp (dưới đây u = u(x))
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C \quad (u = u(x) \neq 0)$
$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{u}du = e^{u} + C$
$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + tg^2 x)dx = tgx + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int (1 + tg^2 u)du = tgu + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot g^2 x)dx = -\cot gx + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int (1 + \cot g^2 u)du = -\cot gu + C$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C \quad (x > 0)$	$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C \quad (u > 0)$
$\int \cos(ax + b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + C \quad (a \neq 0)$	
$\int \sin(ax + b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C \quad (a \neq 0)$	
$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax + b\rvert + C$	
$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \quad (a \neq 0)$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax + b} + C \quad (a \neq 0)$	

Vấn đề 1: XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Bài toán 1: CMR F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a ; b)

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

+ Bước 1: Xác định F'(x) trên (a ; b)

+ Bước 2: Chứng tỏ rằng $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a; b)$

Chú ý: Nếu thay (a ; b) bằng [a ; b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

+ Bước 1: Xác định F'(x) trên (a ; b)

  Xác định $F'(a^+)$

  Xác định $F'(b^-)$

+ Bước 2: Chứng tỏ rằng $\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a\,;\,b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}$

Ví dụ 1: CMR hàm số: $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$ với $a > 0$

là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ trên R.

Giải:

Ta có: $$F'(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2 + a})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} = f(x)$$

Vậy F(x) với a > 0 là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên R.

Ví dụ 2: CMR hàm số: $F(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ trên R.

Giải:

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a/ Với $x \neq 0$, ta có:

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

b/ Với x = 0, ta có:

- Đạo hàm bên trái của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-e^0}{x} = 1.$$

- Đạo hàm bên phải của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^0}{x} = 1.$$

Nhận xét rằng $F'(0^-) = F'(0^+) = 1 \Rightarrow F'(0) = 1$.

Tóm lại: $F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \ge 0 \\ 2x+1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} = f(x)$

Vậy F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên R.

<u>Bài toán 2</u>: Xác định các giá trị của tham số để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a ; b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

+ Bước 1: Xác định F'(x) trên (a ; b)
+ Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a ; b), điều kiện là:

  $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a; b)$

  Dùng đồng nhất của hàm đa thức $\Rightarrow$ giá trị tham số.

Chú ý: Nếu thay (a ; b) bằng [a ; b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

+ Bước 1: Xác định F'(x) trên (a ; b)

  Xác định $F'(a^+)$

  Xác định $F'(b^-)$
+ Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a ; b), điều kiện là:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a\,;\,b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \text{giá trị của tham số.}$$

<u>Bài toán 3</u>: Tìm hằng số tích phân

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Dùng công thức đã học, tìm nguyên hàm: F(x) = G(x) + C
- Dựa vào đề bài đã cho để tìm hằng số C.

  Thay giá trị C vào (*), ta có nguyên hàm cần tìm.

<u>Ví dụ 3</u>: Xác định a , b để hàm số: $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

là một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \le 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ trên R.

<u>Giải</u>:

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a/ Với $x \neq 1$, ta có: $F'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

b/ Với x = 1, ta có:

Để hàm số F(x) có đạo hàm tại điểm x = 1, trước hết F(x) phải liên tục tại x = 1, do đó : $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$ (1)

- Đạo hàm bên trái của hàm số y = F(x) tại điểm x = 1.

$$F'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

- Đạo hàm bên phải của hàm số y = f(x) tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} = a.$$

Hàm số y = F(x) có đạo hàm tại điểm x = 1 $\Leftrightarrow F'(1^-) = F'(1^+) \Leftrightarrow a = 2.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được b = –1.

Vậy hàm số y = F(x) có đạo hàm tại điểm x = 1, nếu và chỉ nếu a = 2, b = –1.

Khi đó: F’(1) = 2 = f(1)

Tóm lại với a = 2, b = 1 thì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

<u>Ví dụ 4</u>: Xác định a , b , c để hàm số: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của $F(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}$ trên R.

<u>Giải</u>:

Ta có: $F'(x) = (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{-2x} = \left[-2ax^2 + 2(a - b)x + b - 2c\right]e^{-2x}$

Do đó F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên R

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in R$

$\Leftrightarrow -2ax^2 + 2(a - b)x + b - 2c = -2x^2 + 8x - 7, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a - b = 4 \\ b - 2c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $F(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-2x}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Từ đó suy ra nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Bài 2. Chứng tỏ rằng hàm số $F(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Bài 3. Xác định a, b, c sao cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c).e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên R.

ĐS: $a = -2$; $b = 1$; $c = -1$.

Bài 4. a/ Tính nguyên hàm F(x) của $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 7}{(x+1)^2}$ và $F(0) = 8$.

b/ Tìm nguyên hàm F(x) của $f(x) = \sin^2\frac{x}{2}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

ĐS: a/ $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{x+1}$; b/ $F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x + 1)$

Bài 5. a/ Xác định các hằng số a, b, c sao cho hàm số:

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số:

$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

b/ Tìm nguyên hàm G(x) của f(x) với $G(2) = 0$.

ĐS: a/ $a = 4$; $b = -2$; $c = 1$; b/ $G(x) = (4x^2 - 2x + 10)\sqrt{2x-3} - 22$.

Vấn đề 2: XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG VIỆC SỬ DỤNG BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

Ví dụ 1: CMR , nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ với $a \neq 0$.

Giải:

Ta luôn có: $f(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b)$ với $a \neq 0$.

Áp dụng tính chất 4, ta được: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)d(ax+b)\frac{1}{a}F(ax+b) + C$ (đpcm).

Ghi chú: Công thức trên được áp dụng cho các hàm số hợp:

$$\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C, \text{ với } u = u(x)$$

Ví dụ 2: Tính các tích phân bất định sau:

a/ $\int (2x+3)^3 dx$ b/ $\int \cos^4 x.\sin x dx$ c/ $\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx$ d/ $\int \frac{(2\ln x + 1)^2}{x}dx$

Giải:

a/ Ta có: $\int (2x+3)^3 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3 d(2x+3) = \frac{1}{2}.\frac{(2x+3)^4}{4} + C = \frac{(2x+3)^4}{8} + C.$

b/ Ta có: $\int \cos^4 x.\sin x dx = -\int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

c/ Ta có: $\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = 2\ln(e^x+1) + C$

d/ Ta có: $\int \frac{(2\ln x+1)^2}{x}dx = \frac{1}{2}\int (2\ln x+1)^2 d(2\ln x+1) = \frac{1}{2}(2\ln x+1)^3 + C.$

Ví dụ 3: Tính các tích phân bất định sau:

a/ $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$ b/ $\int \cot g^2 x dx$ c/ $\int tgx dx$ d/ $\int \frac{tgx}{\cos^3 x}dx$

Giải:

a/ Ta có: $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx = \int (1-\cos x)dx = x - \sin x + C$

b/ Ta có: $\int \cot g^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\cot gx - x + C$

c/ Ta có: $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

d/ Ta có: $\int \frac{tgx}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\frac{1}{3}\cos^{-3} x + C = -\frac{1}{3\cos^3 x} + C.$

Ví dụ 4: Tính các tích phân bất định sau:

a/ $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ b/ $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$

Giải:

a/ Ta có: $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

b/ Ta có: $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$

BÀI TẬP

Bài 6. Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a/ $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$; b/ $f(x) \sin^3 x$.

ĐS: a/ $\frac{1}{2}(x + \sin x) + C$; b/ $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

Bài 7. Tính các tích phân bất định :

a/ $\int e^x(2 - e^{-x})dx$; b/ $\int \frac{e^x}{2^x}dx$; c/ $\int \frac{2^{2x}.3^x.5^x}{10^x}dx$.

d/ $\int \frac{e^{2-5x}+1}{e^x}dx$; e/ $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$

ĐS: a/ $2e^x - x + C$; b/ $\frac{e^x}{(1-\ln 2)2^x} + C$; c/ $\frac{6^x}{\ln 6} + C$

d/ $-\frac{1}{6}e^{2-6x} - e^{-x} + C$; e/ $\ln(e^x + 2) + C$.

Bài 8. Tính các tích phân bất định :

a/ $\int \sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}\,dx$; b/ $\int \sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}\,dx$; c/ $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$;

d/ $\int (1-2x)^{2001}dx$; e/ $\int \frac{\sqrt{3-4\ln x}}{x}dx$

ĐS: a/ $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$; b/ $\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + C$; c/ $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$;

d/ $-\frac{1}{2}.\frac{(1-2x)^{2002}}{2002} + C$; e/ $\frac{1}{6}(3+4\ln x)\sqrt{3+4\ln x} + C.$

Vấn đề 3: XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

Phương pháp phân tích thực chất là việc sử dụng các đồng nhất thức để biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành tổng các biểu thức mà nguyên hàm của mỗi biểu thức đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc chỉ bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết.

Chú ý quan trọng: Điểm mấu chốt là phép phân tích là có thể rút ra ý tưởng cho riêng mình từ một vài minh hoạ sau:

- Với $f(x) = (x^3 - 2)^2$ thì viết lại $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.
- Với $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ thì viết lại $f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$.
- Với $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ thì viết lại $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}$
- Với $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}}$ thì viết lại $f(x) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3-2x} - \sqrt{2x+1})$
- Với $f(x) = (2^x - 3^x)^2$ thì viết lại $f(x) = 4^x - 2.6^x + 9^x$.
- Với $f(x) = 8\cos^3 x.\sin x$ thì viết lại $f(x) = 2(\cos 3x + 3\cos x).\sin x$
  $= 2\cos 3x.\sin x + 6\cos x.\sin x = \sin 4x - \sin 2x + 3\sin 2x = \sin 4x + 2\sin 2x.$
- $tg^2x = (1 + tg^2x) - 1$
- $\cot g^2x = (1 + \cot g^2x) - 1$
- $\dfrac{x^n(1+x^2)+1}{1+x^2} = x^n + \dfrac{1}{1+x^2}$.

Đó chỉ là một vài minh hoạ mang tính điển hình.

<u>Ví dụ 1</u>: Tính tích phân bất định: $I = \int x(1-x)^{2002}dx$.

<u>Giải</u>:

Sử dụng đồng nhất thức : $x = 1 - (1 - x)$

ta được: $x(1-x)^{2002} = [1-(1-x)](1-x)^{2002} = (1-x)^{2002} - (1-x)^{2003}$.

Khi đó:

$$I = \int (1-x)^{2002}dx - \int (1-x)^{2003}dx = -\int (1-x)^{2002}d(1-x) + \int (1-x)^{2003}d(1-x)$$

$$= -\frac{(1-x)^{2003}}{2003} + \frac{(1-x)^{2004}}{2004} + C.$$

<u>Tổng quát</u>: Tính tích phân bất định: $I = \int x(ax+b)^{\alpha}dx$, với $a \neq 0$

Sử dụng đồng nhất thức: $x = \dfrac{1}{a}.ax = \dfrac{1}{a}[(ax+b) - b]$