HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

TS NGUYỄN QUỐC BẢO (CHỦ BIÊN)
TS TRẦN NHẤT DŨNG

LÝ THUYẾT
PHẦN TỬ HỮU HẠN

TẬP II

**(Tài liệu dùng cho đào tạo Cao học
các chuyên ngành Cơ và Xây dựng Công trình)**

LƯU HÀNH NỘI BỘ

NHÀ XUẤT BẢN QUÂN ĐỘI NHÂN DÂN
HÀ NỘI - 2002

NHÀ XUẤT BẢN MONG BẠN ĐỌC GÓP Ý KIẾN, PHÊ BÌNH

Chỉ đạo nội dung:

BAN CHỈ ĐẠO NGHIÊN CỨU, BIÊN SOẠN, HOÀN THIỆN HỆ THỐNG TÀI LIỆU HUẤN LUYỆN, GIÁO TRÌNH, GIÁO KHOA, HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ.

Trưởng ban: Thiếu tướng, PGS-TS Nguyễn Đức Luyện

Phó trưởng ban: Đại tá, PGS-TS Phạm Huy Chương

Thư ký: Thượng tá, Th.S Nguyễn Văn Thàng

Biên soạn:

Chủ biên: TS Nguyễn Quốc Bảo
Tham gia biên soạn: TS Trần Nhất Dũng

Quyết định ban hành
Số: 1374/QĐ-HV
Ngày 10 tháng 8 năm 2000

355 - 355.7
——————— 1412 - 2000
QĐND - 2001

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	7
Chương 8 : Bài toán phẳng	9
8.1. Các phần tử tam giác	10
8.2. Các phần tử chữ nhật	17
8.3. Phần tử đồng tham số	23
8.4. Mô hình chuyển vị không tương thích	28
8.5. Phép kiểm định "Patch"	36
8.6. Phần tử bê tông cốt thép	37
8.7. Phần tử đối xứng trục	40
8.8. Thủ tục Plane	43
8.9. Ví dụ minh hoạ	48
Chương 9 : Phân tích ứng suất 3 chiều	53
9.1. Phần tử 3 chiều	55
9.2. Phần tử đồng tham số 8 nút	59
9.3. Phần tử đồng tham số 20 nút	71
9.4. Tính chất của các mặt phần tử	73
9.5. Véctơ tải trọng phần tử	76
9.6. Tính ứng suất phần tử	80
9.7. Thủ tục THREDS	84
9.8. Các ví dụ tính	90
Chương 10 : Phân tích tấm chịu uốn	97
10.1. Lý thuyết cơ bản của tấm uốn	98
10.2. Các hàm chuyển vị	102
10.3. Các phần tử tấm uốn	102
10.4. Biến dạng trượt trong tấm	108
10.5. Phần tử đồng tham số 4 nút	116
10.6. Phần tử đồng tham số 8 nút (PLATE8)	128

10.7. Chương trình con PLATE 134
10.8. Các ví dụ 140

Chương 11 : Kết cấu vỏ 149

11.1. Khái niệm về kết cấu vỏ 150
11.2. Tổng quan phần tử vỏ 152
11.3. Phần tử vỏ giảm bậc song tuyến tính 154
11.4. Phần tử vỏ 8 nút 178
11.5. Chương trình con SHELL 187
11.6. Ví dụ 194

Chương 12 : Phần mềm phân tích phần tử hữu hạn 197

12.1. Nhập và xuất số liệu 198
12.2. Tổng quan phần mềm phân tích PTHH 200
12.3. Chương trình nguồn PASSFEM 204

Tài liệu tham khảo 283

LỜI NÓI ĐẦU

Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) là một phương pháp tính đã được hình thành và phát triển trong vòng vài chục năm trở lại đây, nhưng do yêu cầu tính toán của một bài toán thực tế thường đòi hỏi một khối lượng tính toán rất lớn, do vậy việc ứng dụng PP PTHH trước đây gặp không ít khó khăn. Chỉ cho đến khi có sự xuất hiện của các máy tính cá nhân (PC) cùng với những tiến bộ to lớn của công nghệ tin học trong những năm gần đây mới thật sự cho phép phương pháp tính này được ứng dụng một cách phổ biến và rộng rãi. Cùng với việc tính giải các đại lượng cơ học của kết cấu như Biến dạng; Ứng suất; Chuyển vị ... PP PTHH còn là cơ sở của lĩnh vực mô phỏng hoá trong các bài toán thiết kế. Thông qua sự phát triển của kỹ thuật đồ hoạ trên máy tính người ta có thể mô phỏng hoá các hoạt động của kết cấu; giả định vô số các phương án tính toán để từ đó chọn lựa giải pháp tối ưu. Điều này cho phép giảm chi phí và thời gian thực hiện các thí nghiệm theo phương pháp truyền thống.

Hiện nay cùng với sự tiến bộ của khoa học kỹ thuật máy tính đã trở thành một bộ phận quen thuộc và không thể thiếu trong các hoạt động nghiên cứu cũng như ứng dụng thực tiễn. Theo đó cũng ngày càng xuất hiện nhiều hơn các chương trình tính toán sử dụng PP PTHH với phạm vi ứng dụng ngày càng phong phú và đa dạng : tính toán kết cấu; tính toán nhiệt; điện từ; mô phỏng; tối ưu hoá .v.v. Đối với thực tế ở Việt nam PP PTHH cũng đã từng được nghiên cứu và ứng dụng khoảng 15 đến 20 năm trở lại đây với số lượng người tham gia nghiên cứu ngày càng tăng nhanh, phạm vi ứng dụng ngày càng phong phú thêm.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và nghiên cứu PP PTHH - nắm bắt các khía cạnh, cốt lõi của nó theo một trình tự LOGIC và tạo điều kiện cho các đọc giả có thể

vận dụng nó để lập trình tìm lời giải cho một bài toán cụ thể, tập thể tác giả chúng tôi đã cố gắng tìm hiểu và biên soạn tài liệu này. Để tài liệu có thể đến được tay bạn đọc chúng tôi đã tham khảo nhiều tài liệu của các tác giả nổi tiếng như R.L. Taylor, E.L.Wilson, K.Bathe, S.Timoshenko, O.C.Zienkiewicz .v.v.. và cuối cùng đã chọn cách trình bày nội dung sách theo tài liệu: **Finite Element Analysis - Theory And Programming** *của tác giả C.S. Krishnamoorthy. Sách này được biên soạn chủ yếu phục vụ các đối tượng nghiên cứu có trình độ đại học và trên đại học (nghiên cứu sinh, học viên cao học ...), thuộc khối Kỹ thuật công trình và Cơ kỹ thuật - Là các đối tượng đã được trang bị tốt các kiến thức về lý thuyết ma trận, về đại số tuyến tính và tin học đại cương. Đây là một cuốn sách được trình bày theo kiểu giáo trình với các diễn giải lý thuyết cô đọng và dễ hiểu, có phần ví dụ minh hoạ và giải thuật để người đọc có thể vận dụng.*

Sách được trình bày với tổng số 13 chương xuất bản thành 2 tập

Tập 1 : gồm 7 chương trong đó 5 chương đầu dành cho việc nghiên cứu các lý thuyết chung của PP PTHH. Chương 6 là cấu trúc và giải thuật của một chương trình tính minh hoạ. Chương 7 trình bày các lý thuyết tính giải bài toán thanh phẳng (2D) và thanh không gian (3D).

Tập 2 : gồm 5 chương trình bày các dạng bài toán điển hình của PP PTHH : bài toán phẳng; bài toán 3 chiều tổng quát; bài toán tấm; bài toán vỏ; v.v.. và cuối cùng là phần mã nguồn của toàn bộ chương trình tính theo các lý thuyết đã trình bày trong các chương trước.

Tuy nhiên do kiến thức còn hạn chế, thời gian biên soạn ngắn chắc chắn trong lần xuất bản đầu tiên này không thể tránh khỏi các sai sót đáng tiếc, xin được thông cảm và rất mong nhận được các ý kiến đóng góp xây dựng của các đọc giả gần xa.

CÁC TÁC GIẢ

8 Bài toán phẳng

Như đã trình bày trong chương 2, khi thoả mãn một số các điều kiện đơn giản hoá, các bài toán phân tích kết cấu 3 chiều tổng quát có thể qui về bài toán phẳng như bài toán ứng suất phẳng, biến dạng phẳng v.v... Trong chương 3 cũng đã dẫn ra phần tử tam giác biến dạng không đổi (tam giác 3 nút), phần tử chữ nhật 4 nút nhằm phân tích các loại kết cấu phẳng này. Trong chương này chúng ta sẽ nhắc lại ngắn gọn các phần tử đã trình bày trên, đồng thời dẫn ra công thức phần tử hữu hạn cho các phần tử tam giác bậc cao và phần tử đồng tham số.

Các bước xây dựng công thức phần tử hữu hạn để phân tích bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng có thể được mở rộng dễ dàng để phân tích bài toán vật thể đối xứng chịu tải trọng đối xứng. Điều đó được minh hoạ qua các bước xây dựng tính chất phần tử cho phần tử đồng tham số 4 nút. Ngoài những nội dung cơ bản bàn về xây dựng tính chất phần tử để giải các bài toán phẳng, trong chương này còn đề cập đến kiểm định Patch và phần tử bê tông cốt thép. Kết quả phân tích lý thuyết được thể hiện lập trình trong hai chương trình con. Chương trình con CST cho phần tử tam giác phẳng 3 nút và chương trình con PSQR4 cho phần tử tứ giác đồng tham số 4 nút. Cả hai chương trình con trên đều được đưa vào trong thư viện phần tử của PASSFEM.

8.1. Các phần tử tam giác

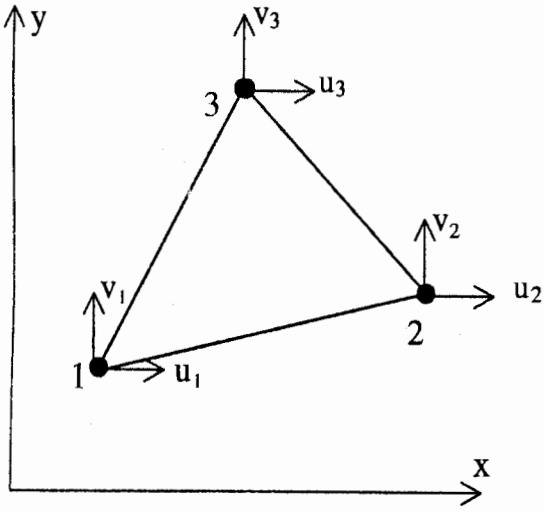
Các phần tử tam giác có ưu điểm là đơn giản trong quá trình xây dựng tính chất phần tử và thể hiện trong lập trình. Về sử dụng, loại phần tử này cũng tỏ ra thích hợp khi nghiên cứu các vùng tập trung ứng suất và các bài toán có biên phức tạp. Dưới đây ta xét hai loại phần tử tam giác là tam giác biến dạng không đổi và tam giác biến dạng tuyến tính.

8.1.1. Tam giác biến dạng không đổi (CST)

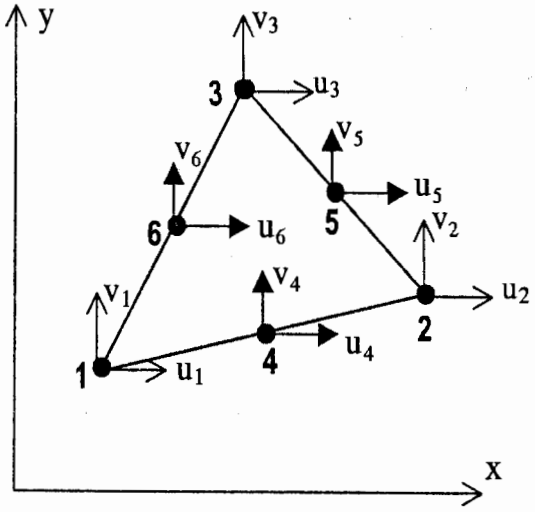
Trên hình 8.1 minh hoạ phần tử tam giác 3 nút. Đặt mặt phẳng phần tử vào hệ trục Đềcác tổng quát 0xy. Phần tử có 3 nút, mỗi nút có hai thông số chuyển vị. Chuyển vị u dọc trục x và chuyển vị v dọc trục y. Hàm dáng của phần tử trong hệ toạ độ tự nhiên đã được dẫn ra theo công thức (3.39). Tính chất phần tử cũng nhận được theo các công thức (3.85), (3.90) và (3.105) trong chương 3. Do hàm dáng được xây dựng từ nội suy tuyến tính chuyển vị của điểm bất kỳ trong phần tử theo toạ độ nên biến dạng và ứng suất là không đổi trong toàn phần tử và phần tử tam giác 3 nút còn được gọi là phần tử tam giác biến dạng không đổi. Đây là phần tử đơn giản nhất trong xây dựng tính chất phần tử cũng như trong thể hiện lập trình.

8.1.2. Phần tử tam giác biến dạng tuyến tính (LST)

tử tam giác biến dạng tuyến tính là phần tử tam giác 6 nút, 3 nút chính đặt tại 3 đỉnh của tam giác và 3 nút phụ đặt tại 3 điểm giữa của 3 cạnh như chỉ ra trên hình 8.2. Chuyển vị tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử được xấp xỉ bậc hai theo toạ độ. Từ xấp xỉ trên dẫn ra được hàm dáng theo các công thức (3.46) và (3.47).



Hình 8.1 - Phần tử CST.



Hình 8.2 - Phần tử LST.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{N_2\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{N_2\}^T \end{bmatrix} \{d\} \qquad (8.1)$$

Trong đó:

$\{N_2\}^T = [\ L_1(2L_1-1) \quad L_2(2L_2-1) \quad L_3(2L_3-1) \quad 4L_1L_2 \quad 4L_2L_3 \quad 4L_3L_1\ ]$

và: $\{d\}^T = [\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6\ ]$

Việc tính ma trận độ cứng theo công thức (3.97a) cho phần tử tam giác biến dạng tuyến tính khá phức tạp nên ít được sử dụng. Trong thực hành thường sử dụng phương pháp do **Felippa** đề xuất.

Tư tưởng thủ tục của **Felippa** cũng khá đơn giản. Biến dạng tại mỗi điểm trong phần tử được biểu diễn như các thành phần đạo hàm của chuyển vị theo các phương trình Côsi. Như vậy nếu các thông số chuyển vị được nội suy bậc hai theo toạ độ thì biến dạng tại mỗi điểm tương ứng sẽ có quan hệ bậc nhất với toạ độ. Để nội suy bậc hai cho chuyển vị ta cần 6 nút, để nội suy bậc nhất cho biến dạng ta chỉ cần 3 nút là đủ. Trên cơ sở lập luận này, **Felippa** đặt vấn đề nội suy biến dạng và ứng suất tại mỗi điểm trong phần tử theo các thông

số tương ứng tại 3 nút chính. Đặt biểu thức nội suy cho biến dạng và ứng suất dưới dạng:

$$\{\varepsilon\} = [N_\varepsilon]\{\varepsilon_n\} \quad (8.2a)$$

$$\{\sigma\} = [N_\sigma]\{\sigma_n\} \quad (8.2b)$$

Trong hai công thức trên chỉ số n chỉ các thông số tại nút. Nếu vật liệu là đồng nhất và đẳng hướng trong toàn phần tử thì hai hàm dáng $[N_\varepsilon]$ và $[N_\sigma]$ sẽ đồng nhất với nhau. Mặt khác như đã biết trong chương 3, các giá trị biến dạng tại nút có thể biểu diễn thông qua các thông số chuyển vị nút nhờ ma trận chuyển vị nút - biến dạng $[B_n]$ theo công thức (3.9).

$$\{\varepsilon_n\} = [B_n]\{d\} \quad (8.3)$$

Ứng suất tại mỗi điểm biểu diễn qua biến dạng, như đã biết qua ma trận vật liệu:

$$\{\sigma_n\} = [C_n]\{\varepsilon_n\} \quad (8.4)$$

Với các quan hệ trên, năng lượng biến dạng trong phần tử có thể biểu diễn như sau:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV = \frac{1}{2}\{\varepsilon_n\}^T\iiint_V [N_\varepsilon]^T[N_\sigma]\{\sigma_n\}dV \quad (8.5a)$$

Thay (8.2) và (8.3) vào ta được:

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T\{B_n\}^T\iiint_V [N_\varepsilon]^T[N_\sigma][C_n][B_n]\{d\}dV \quad (8.5b)$$

Từ đó suy ra công thức ma trận độ cứng:

$$[k] = [B_n]^T[D][C_n][B_n] \quad (8.6a)$$

Trong đó ma trận [D] có dạng tích phân:

$$[D] = \iiint_V [N_\varepsilon]^T[N_\sigma]dV \quad (8.6b)$$

Tích phân phương trình (8.6b) là dễ hơn nhiều so với tích phân phương trình