

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

T. N. Krishnamurti & L. Bounoua

***Nhập môn
Kỹ thuật dự báo thời tiết số***

Người dịch: Kiều thị Xin

HÀ NỘI, 5-2002

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình “*Nhập môn Kỹ thuật dự báo thời tiết số*” của hai tác giả T. N. Krishnamurti & L. Bounoua đầu tiên được viết cho các lớp đào tạo của Tổ chức Khí tượng thế giới. Người tham gia các lớp này phần lớn là những sinh viên xuất sắc chuẩn bị tốt nghiệp. Trong lần xuất bản này tài liệu được mở rộng và cập nhật hoàn toàn những nguồn số liệu mới, các kết quả và giải thích code nguồn được trình bày chi tiết. Các chương được sắp xếp logic theo trình tự phát triển của dự báo số, trải rộng từ các phương pháp sai phân hữu hạn đến các bài tập động lực học và nhiệt động lực học; cuối cùng là giới thiệu những mô hình dự báo đơn giản. Mỗi một chương được soạn thảo có tính hợp lý riêng của nó. Tuy vậy, để thuận tiện các chương trình cần sử dụng trong các chương khác nhau được tập hợp trong một thư viện Fortran duy nhất.

Kèm theo giáo trình này, các phần mềm cho tất cả các bài tập trích dẫn trong giáo trình được biên tập riêng trong Phụ lục hay lưu giữ trên một đĩa mềm. Các đoạn mã nguồn chính cũng như những tập số liệu mẫu được giới thiệu trong giáo trình để minh họa một số ví dụ. Tuy nhiên, người sử dụng cần lưu ý là không nhất thiết phải nghiên cứu chi tiết hết những trình bày bằng sử dụng mã nguồn trong giáo trình. Ngoài ra, phần mềm đồ họa không có trong thư viện. Các mã nguồn được viết bằng ngôn ngữ Fortran chuẩn và được soạn thảo để có thể chạy trên nhiều loại máy tính trạm (workstations) cũng như trên máy tính cá nhân.

Công trình này được biên soạn trong nhiều năm dưới sự cộng tác của nhiều nhà khoa học và nhiều sinh viên thuộc Phòng thí nghiệm tính toán Đại học tổng hợp California, với nhiều nguồn tài trợ kinh phí khác nhau như Quỹ khoa học quốc gia (NSF), Hàng không Vũ trụ Quốc gia (NASA), Cơ quan nghiên cứu Hải quân (ONR) và Cơ quan quản lý Khí quyển–Đại dương Quốc gia (NOAA).

Giáo trình “*Nhập môn Kỹ thuật dự báo thời tiết số*” được xuất bản năm 1996 tại Nhà xuất bản CRC Press, Inc., 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida 33431.

Ở Việt nam, tại Bộ môn Khí tượng, Trường ĐHTH Hà nội trước đây và Trường ĐHKHTN thuộc ĐHQG Hà nội hiện nay, một môn học chuyên ngành tương tự là “*Dự báo thời tiết bằng phương pháp số*” đã được giảng dạy trong nhiều năm qua,

chủ yếu dựa theo các tài liệu giáo khoa của Liên xô cũ, xuất bản từ những năm 70 về trước. Trong lúc đó, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của Khoa học máy tính và Công nghệ viễn thông, chuyên ngành Dự báo thời tiết–khí hậu bằng phương pháp số đã và đang phát triển cực mạnh trên thế giới trong khoảng 20 năm gần đây, cả về lý thuyết và áp dụng nghiệp vụ. Ở các nước đã phát triển (Mỹ, Anh, Đức, Pháp, Nhật, ...) đã và đang áp dụng nghiệp vụ những mô hình dự báo thời tiết, khí hậu toàn cầu cực hiện đại, với độ phân giải ngang đến 0.5×0.5 độ kinh vĩ trên 40–50 mực theo chiều đứng..., trong số đó đã có những mô hình lồng cả khí quyển và đại dương. Lồng ghép vào mô hình toàn cầu là những mô hình khu vực có độ phân giải ngang và đứng rất cao hơn, có khả năng dự báo thời tiết, khí hậu quy mô vừa $-\alpha$ và $-\beta$ khá tốt. Phương pháp dự báo số đã hoàn toàn thống trị ở rất nhiều nước trên thế giới.

Để sinh viên, NCS, cán bộ nghiên cứu và tác nghiệp trong nước có thể hiểu biết và tiệm cận với các loại mô hình hiện đại công nghệ cao như vậy và tiến tới áp dụng chúng, trong chuyên ngành Dự báo thời tiết–khí hậu cần cập nhật những giáo trình mới hiện đại bổ sung làm tài liệu tham khảo trong giảng dạy bậc đại học và sau đại học, đồng thời cần cập nhật những mô hình dự báo công nghệ cao làm phương tiện nghiên cứu trong nhà trường cũng như áp dụng nghiệp vụ trong sản xuất. Việc biên dịch giáo trình “*Nhập môn Kỹ thuật dự báo thời tiết số*” nhằm góp phần thực hiện một phần nhiệm vụ nêu ra này.

Trong vài năm gần đây chúng tôi đã thử trích giới thiệu một số phần trong giáo trình này cho SV năm thứ 4, SV hệ cử nhân tài năng Ngành Khí tượng, Trường ĐHKHTNHN dưới dạng chuyên đề hẹp. Thực tế cho thấy, SV đã tiếp thu rất hiệu quả, sáng tạo và rất lý thú. Đối với SV ta hiện nay nhiều nội dung trong giáo trình này còn có thể dùng làm công cụ tập sự trong nghiên cứu khoa học.

Người biên dịch hy vọng, giáo trình “*Nhập môn Kỹ thuật dự báo thời tiết số*” sẽ được dùng làm tài liệu bổ ích trong giảng dạy môn Dự báo thời tiết– khí hậu bằng phương pháp số trong trường đại học ở Việt nam vào những năm tới, và là tài liệu tham khảo lý thú cho cán bộ nghiên cứu, tác nghiệp trong ngành Khí tượng–Thuỷ văn cũng như các ngành khác quan tâm đến phương pháp dự báo số.

Người dịch xin chân thành cảm ơn TS Phan Văn Tân đã trao đổi và góp nhiều ý kiến bổ ích trong quá trình dịch, CN Vũ Thanh Hằng và CN Hoàng Thanh Vân đã góp nhiều công sức trong việc chế bản điện tử và hoàn thiện bản dịch này.

Người dịch
HÀ NỘI, 5-2002.

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. NHẬP MÔN	9
CHƯƠNG 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN.....	12
2.1 Hình thành sai phân hữu hạn	12
2.2 Đạo hàm bậc nhất.....	12
2.3 Đạo hàm bậc hai.....	14
2.4 Toán tử Laplacian	16
2.5 Toán tử Jacobian	21
2.6. Sai phân thời gian	25
CHƯƠNG 3. TÍNH CHUYỂN ĐỘNG THẲNG ĐỨNG	33
3.1. Tính tốc độ thẳng đứng từ số liệu gió phân bố không điều hòa trong không gian	34
3.2. Tốc độ thẳng đứng từ số liệu gió điều hòa trong không gian.....	42
3.3. Tốc độ thẳng đứng từ phương trình omega tựa địa chuyển.....	43
3.4. Phương trình omega cân bằng phi tuyến đa mực.....	52
3.5. Các thuật toán số.....	58
CHƯƠNG 4. XÁC ĐỊNH HÀM DÒNG, THỂ TỐC ĐỘ, VÀ ĐỘ CAO ĐỊA THỂ VỊ TỪ TRƯỜNG GIÓ	60
4.1. Phương pháp lỏng dần (relaxation method).....	61
4.2. Phương pháp biến đổi Fourier	63
4.3. Độ cao địa thế vị từ trường gió.....	69
CHƯƠNG 5. PHÂN TÍCH KHÁCH QUAN	74
5.1. Phương pháp Panofsky, gần đúng đa thức.....	74
5.2. Phương pháp Cressman và kỹ thuật hiệu chỉnh liên tiếp	76
5.3. Sơ đồ phân tích khách quan Barnes	81
5.4. Kỹ thuật nội suy tối ưu.....	87
CHƯƠNG 6. NHỮNG KHÁI NIỆM VẬT LÝ CƠ BẢN.....	94
6.1. Biến đổi các biến ẩm.....	95
6.2. Xác định mực ngưng kết nâng (LCL).....	98
6.3. Profin đoạn nhiệt ẩm.....	101
6.4. Điều chỉnh đối lưu	102
6.5. Một mô hình mây đơn giản	108
CHƯƠNG 7. ĐỐI LƯU CUMULUS VÀ NGƯNG KẾT QUY MÔ LỚN	117

7.1 Đối lưu Cumulus	117
7.2. Sơ đồ tham số hoá Cumulus của Arakawa- Shubert	126
7.3 Ngưng kết quy mô lớn	127
CHƯƠNG 8. LỚP BIÊN HÀNH TINH.....	130
8.1. Tính toán khí động học Bulk trên đại dương và trên lục địa.....	130
8.2. Tham số gồ ghề.....	131
8.3. Những thông lượng bề mặt từ lý thuyết tương tự	132
8.4. Độ cao của lớp biên trong điều kiện bất ổn định	143
8.5. Độ cao của lớp biên hành tinh trong điều kiện ổn định.....	145
8.6. Phân bố thẳng đứng của các thông lượng	146
CHƯƠNG 9. VẬN CHUYỂN BỨC XẠ	149
9.1. Bức xạ sóng dài	149
9.2. Bức xạ sóng ngắn.....	152
9.3. Đặc điểm mây.....	154
9.4. Cân bằng nhiệt bức xạ trên mặt đất	155
9.5. Mã nguồn (code)	156
CHƯƠNG 10. MÔ HÌNH CHÍNH ÁP	160
10.1. Động lực học của mô hình chính áp	161
10.2. Các tính chất của dòng chính áp.....	162
10.3. Trao đổi năng lượng chính áp	163
10.4. Cấu trúc mô hình và các điều kiện biên.....	164
10.5. Thể hiện các thành phần bình lưu và sơ đồ sai phân thời gian	165
10.6. Điều kiện ban đầu	165
10.7. Mô tả chương trình nguồn	165
CHƯƠNG 11. MÔ HÌNH PHƯƠNG TRÌNH NGUYÊN THUỶ MỘT MỤC.....	179
11.1. Động lực học của mô hình phương trình nguyên thuỷ một mục	179
11.2. Những đặc điểm của mô hình phương trình nguyên thuỷ một mục.....	180
11.3. Cấu trúc mô hình và các điều kiện biên.....	181
11.4. Giải các số hạng bình lưu và sơ đồ sai phân thời gian.....	181
11.5. Tính những hàm ép buộc (forcing)	182
11.6. Ban đầu hoá mô hình phương trình nguyên thuỷ một mục.....	183
CHƯƠNG 12. CƠ SỞ DỮ LIỆU CHO DỰ BÁO THỜI TIẾT SỐ	190
12.1. Phân bố mưa từ bức xạ phát sóng dài.....	191
12.2 .Tốc độ mưa căn cứ vào SSM/I, tốc độ gió và tổng mưa lỏng.....	194
12.3. Chỉ số thực vật chênh lệch chuẩn hoá.....	200
12.4. Độ phủ mây	201
CHƯƠNG 13. NHỮNG SẢN PHẨM CẢNH BÁO CỦA MÔ HÌNH.....	202
13.1. Năng lượng và các thành phần biến đổi năng lượng	202
13.2. Tính quỹ đạo bốn chiều.....	206
TÀI LIỆU THAM KHẢO	214
DANH MỤC CÁC CHƯƠNG TRÌNH CON (SUBROUTINES).....	218

CHƯƠNG 1. NHẬP MÔN

Đây là một giáo trình nhập môn về phương pháp luận của dự báo thời tiết số. Giáo trình được viết cho trình độ sinh viên tài năng trước tốt nghiệp và làm tốt nghiệp ngành Khí tượng. Tài liệu được trình bày giới hạn trong 13 chương với tư liệu thực tập trong một học kỳ. Thực tập synôp tiếp theo sẽ rất bổ ích cho mỗi sinh viên. Giáo trình này cũng thích hợp cho những cán bộ khoa học muốn tự học môn này.

Tài liệu này xuất phát từ một giáo trình đào tạo mà tác giả có kinh nghiệm đã viết cho Tổ chức Khí tượng thế giới (WMO) bắt đầu từ năm 1982, đã được sinh viên và cán bộ khoa học từ nhiều Trung tâm nghiên cứu và đào tạo trên thế giới quan tâm. Văn bản hiện nay đã được sửa đổi rất nhiều, mở rộng và đưa vào nhiều tập số liệu mới. Văn bản đưa vào những tập số liệu mẫu, kèm theo một đĩa mềm cùng với mã nguồn.

Giáo trình này mở đầu bằng việc giới thiệu hệ phương pháp sai phân hữu hạn, được trình bày trong chương 2. Trước hết là kỹ thuật sai phân không gian, các sơ đồ bậc hai và bậc bốn, biểu diễn các toán tử Laplacian, Jacobian và cách giải các phương trình dạng Poisson và Helmholtz. Phần lớn chương này dành cho mô tả khoảng biến đổi rất rộng của phần lớn các sơ đồ sai phân thời gian phổ biến nhất nên dùng trong dự báo thời tiết số. Điều kiện ổn định đối với từng sơ đồ cũng được bàn đến trong chương này.

Chương 3 liệt kê một số kỹ thuật tính tốc độ thẳng đứng. Tốc độ thẳng đứng là biến khí tượng không thám sát được; trong phần lớn các trường hợp xác định nó đều kèm theo tính phân kỳ gió ngang. Độ thiếu chính xác nhỏ trong đo đạc gió ngang sẽ gây ra sai số lớn trong việc xác định tốc độ thẳng đứng. Hiểu biết được các phương pháp tính tốc độ thẳng đứng là một vấn đề quan trọng.

Chương 4 mô tả hai phương pháp mạnh và phổ biến để tính hàm dòng và thế tốc độ, đó là kỹ thuật lỏng dần (relaxation) và kỹ thuật biến đổi Fourier. Ở đây còn giới thiệu cả mối quan hệ giữa áp và gió. Không giống vùng ôn đới nơi sự ép buộc địa chuyển là quan trọng, ở vùng nhiệt đới do gió không là gió địa chuyển nên phải khảo sát một số quan hệ được gọi là “cân bằng”. Quan hệ này sẽ giải đối với áp suất và cho ra trường gió. Chương này sẽ cho thấy trường áp được rút ra từ các định luật cân bằng tuyến tính và phi tuyến như thế nào?

Chương 5 viết về phân tích khách quan, chương này sẽ giới thiệu 4 phương pháp phân tích số liệu gần đúng, từ đa thức đơn giản đến nội suy tối ưu. Chúng

minh họa số liệu thô được phân tích như thế nào vào mảng nút lưới.

Các quá trình vật lý thực sự quan trọng đối với sự tiến triển của thời tiết. Chương 6 đưa vào những khái niệm vật lý cơ bản gắn liền với dự báo thời tiết số. Về cơ bản, chương này đề cập đến việc sử dụng các biến ẩm trong khí tượng cùng với một số thuật toán mô tả về các khía cạnh tính toán. Ở đây cũng sẽ giới thiệu một số nguyên tắc về tính ổn định.

Chương 7 giới thiệu một mô hình đối lưu đơn giản minh họa sự tiến triển của lực nổi điều khiển khí quyển khô về nhiệt. Mô hình này là một ví dụ mở đầu của mô hình hoá đối lưu. Bài toán tổng hợp tham số hoá đối lưu cũng được giới thiệu trong chương này. Một vài sơ đồ chung nhất xác định tốc độ mưa phát sinh từ đối lưu cumulus cũng được giới thiệu ở đây. Chương này còn có một tiết giới thiệu về ngưng kết quy mô lớn.

Lớp biên hành tinh là một thành phần quan trọng cần được mô hình hoá. Trong chương 8 giới thiệu biện pháp tốt nhất để mô hình hóa các thông lượng động lượng, nhiệt và ẩm từ bề mặt (cả trên đất và trên biển). Chương 8 trình bày một số phương pháp tính các thông lượng này. Ở đây còn đề cập đến một lớp khí quyển của các thông lượng không đổi có độ cao khoảng vài chục mét sát bề mặt. Chương này còn trình bày cách tính các thông lượng bề mặt cũng như phân bố thẳng đứng của chúng.

Chương 9 giới thiệu cách tính vận chuyển bức xạ. Sự thể hiện của độ chói bức xạ sóng dài và sóng ngắn, vai trò của mây; cân bằng năng lượng mặt đất và kết quả biến trình ngày của chúng cũng được nêu ra ở đây, tuy nhiên chỉ thể hiện quá trình vật lý cơ bản quan trọng này một cách đơn giản và nổi bật.

Chương 10 giới thiệu một mô hình chính áp đơn giản. Đối với những ứng dụng ở nhiệt đới thì hàm dòng là một biến phụ thuộc cơ bản và nhận được từ trường gió đã được phân tích. Mô hình dự báo này áp dụng nguyên tắc bảo toàn xoáy tuyệt đối. Nói chung đây là một mô hình hữu ích đầu tiên để bắt đầu nghiên cứu dự báo số. Mô hình này có khả năng áp dụng thực tế đối với những vùng nhất định của nhiệt đới (phía đông Đại Tây Dương và Tây Phi).

Một mô hình dự báo thời tiết số thứ hai dựa vào nguyên tắc bảo toàn xoáy thế được trình bày trong chương 11. Ở đây giới thiệu cho người đọc mô hình phương trình nguyên thủy đầu tiên. Dự báo gió cũng như độ cao địa thế vị được thực hiện trên một mực đơn.

Chương 12 liệt kê một số tập số liệu vệ tinh hiện có và dựa vào mô hình thích hợp cho dự báo thời tiết số.

Tính toán cảnh báo từ sản phẩm của mô hình là một lĩnh vực quan trọng, nó giúp ta biểu diễn các sản phẩm của mô hình. Nếu như dự báo có độ chính xác cao có thể mô phỏng được các hiện tượng như xoáy xoáy thuận thì những nghiên cứu cảnh báo này có thể cho ta biết ít nhiều về chu trình sống của hiện tượng ấy. Nếu

như dự báo nghèo nàn thì tính toán cảnh báo thực hiện trên sản phẩm của mô hình cũng như các trường phân tích có thể cho ta những nguyên nhân về thiếu sót của mô hình. Đây là những hợp phần quan trọng đối với việc phát triển khả năng dự báo thời tiết số và được đề cập đến trong chương 13.

Điều quan trọng cần nhớ là rất nhiều minh họa trong giáo trình này không thể phục hồi nếu thiếu những phần mềm đồ họa. Ngoài ra các bảng minh họa trong giáo trình không chính xác như trong phần mềm. Phần mềm được nêu ra trong giáo trình cũng được biểu diễn rút gọn. Sinh viên học qua giáo trình này phải có kiến thức cơ sở về khí tượng động lực, khí tượng vật lý và khí tượng synôp. Ngoài ra còn đòi hỏi sinh viên phải hiểu biết và làm việc tốt trên ngôn ngữ Fortran. Sau đây là những tài liệu tham khảo cần thiết nhất

1. Wallace and Hobbs, 1977: Atmospheric Science.
2. Holton, 1992: An introduction to Dynamic Meteorology.
3. Houghton, 1985: Physical Meteorology.
4. Nyhoff and Leestma, 1988: Fortran 77 for Engineers and Scientists.

CHƯƠNG 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

Trong khí tượng, các phương trình cơ bản thống trị hoàn lưu xuất hiện trong khí quyển nói chung bao gồm một hệ các phương trình vi phân riêng phi tuyến. Chúng không có nghiệm giải tích và được giải bằng phương pháp số. Những toán tử chung nhất thường gặp trong khi giải các phương trình này có dạng đạo hàm bậc nhất và bậc hai, Jacobian và Laplacian. Những toán tử này là những đạo hàm không gian và đòi hỏi biết được biến tại một thời điểm cố định. Đạo hàm thời gian thường gặp trong các phương trình dự báo thời tiết số; tuy nhiên vì biến của trạng thái tương lai là chưa biết nên sơ đồ sai phân hữu hạn kèm theo những sai số phụ thuộc thời gian. Chúng có thể được khuyếch đại trong quá trình tích phân và sinh ra bất ổn định tính toán. Do vậy tích phân thời gian các phương trình dự báo thời tiết số được thực hiện nhờ những kỹ thuật đặc biệt và được bàn riêng trong chương này.

Phép gần đúng các đạo hàm không gian tại một điểm nút cho trước dựa vào khai triển Taylor của biến quanh điểm này. Các giá trị của biến coi như đã biết trên những điểm rời rạc trong không gian, và những tổ hợp khác nhau của các khai triển Taylor có thể dẫn đến xác định được các đạo hàm của hàm số với mức độ chính xác khác nhau.

2.1 Hình thành sai phân hữu hạn

Giả sử có hàm $u(x)$ đã biết trên những vị trí rời rạc điều hòa trong không gian cách nhau một khoảng Δx . Các đạo hàm của $u(x)$ có thể nhận được nếu sử dụng sai phân hữu hạn. Khai triển Taylor quanh điểm x sẽ cho ta

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\left.\frac{du}{dx}\right|_x \frac{\Delta x}{1!}+\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_x \frac{\Delta x^2}{2!}+\dots+\left.\frac{d^nu}{dx^n}\right|_x \frac{\Delta x^n}{n!}, \quad (2.1)$$

hay nếu giá số hữu hạn Δx là âm thì

$$u(x-\Delta x)=u(x)-\left.\frac{du}{dx}\right|_x \frac{\Delta x}{1!}+\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_x \frac{\Delta x^2}{2!}+\dots+(-1)^n \left.\frac{d^nu}{dx^n}\right|_x \frac{\Delta x^n}{n!}. \quad (2.2)$$

2.2 Đạo hàm bậc nhất

Từ những khai triển này có thể hình thành ba biểu thức vi phân khác nhau để xác định đạo hàm bậc nhất của hàm u .

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \frac{\Delta x}{2!} + \dots, \quad (2.3)$$

hay

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x) - u(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \frac{\Delta x}{2!} + \dots, \quad (2.4)$$

hay cuối cùng

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)}{2\Delta x} + 2 \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \frac{\Delta x^2}{3!} + \dots \quad (2.5)$$

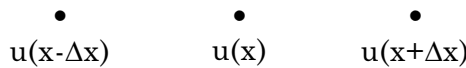
Bậc đại lượng của độ chính xác trong sơ đồ số được xác định bởi bậc của số hạng lớn nhất được bỏ qua trong chuỗi khai triển trong quá trình lấy gần đúng hàm. Vì vậy (2.3), (2.4) và (2.5) có thể viết lại như sau :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta x), \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x) - u(x-\Delta x)}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta x), \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)}{2\Delta x} + \varepsilon(\Delta x)^2, \quad (2.8)$$

trong đó $\varepsilon(\Delta x)$ và $\varepsilon(\Delta x^2)$ biểu diễn những sai số trong xác định đạo hàm và được gọi là sai số bậc nhất và bậc hai của Δx tương ứng. Các phương trình (2.6) và (2.7) cũng được coi là những đạo hàm của độ chính xác bậc nhất trong khi (2.8) lại là đạo hàm của độ chính xác bậc hai. Do mẫu của các điểm dùng trong đánh giá sai phân hữu hạn mà các sơ đồ trên được gọi là sai phân tiến, sai phân lùi và sai phân trung tâm tương ứng (Hình 2.1).



Hình 2.1: Mẫu ba điểm

Cũng theo cách trên có thể mở rộng để nhận đạo hàm bậc nhất của hàm đến độ chính xác bậc bốn. Sơ đồ bậc bốn tất nhiên là chính xác hơn, nhưng đòi hỏi phải biết giá trị của hàm ở 4 điểm lân cận. Sơ đồ này dẫn đến các phương trình sau đây:

$$u(x-2\Delta x) = u(x) - \left. \frac{du}{dx} \right|_x 2\Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_x \frac{(2\Delta x)^n}{n!}, \quad (2.9)$$

$$u(x-\Delta x) = u(x) - \left. \frac{du}{dx} \right|_x \Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_x \frac{\Delta x^n}{n!}, \quad (2.10)$$

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \left. \frac{du}{dx} \right|_x \Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_x \frac{\Delta x^n}{n!}, \quad (2.11)$$