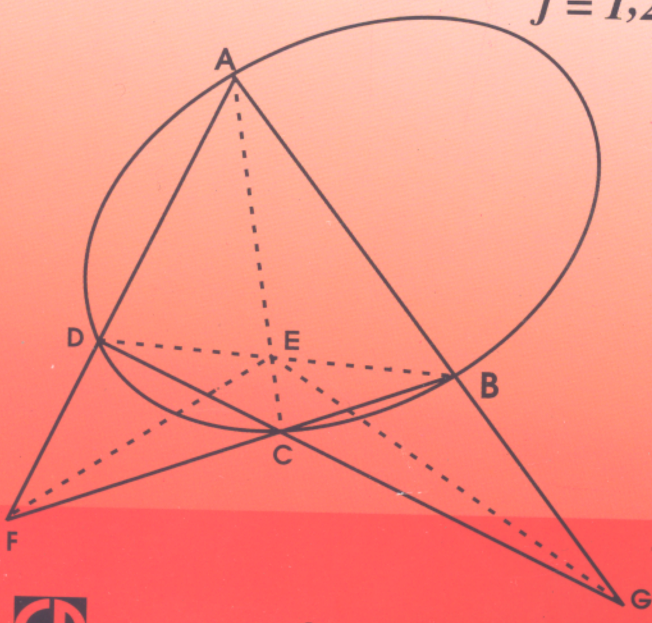
NGUYỄN MỘNG HY

BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j = 0$$
$$j = 1, 2, \ldots, n - m$$



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN MỘNG HY

BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh
VŨ BÁ HOÀ

11 – 2007/CXB/269 – 2119/GD Mã số : 7K495t7 - DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn **BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP** *này được biên soạn cùng với giáo trình* **HÌNH HỌC CAO CẤP** *(đã được xuất bản) nhằm mục đích phục vụ cho việc học tập của sinh viên ngành Toán hệ chính quy, hệ tại chức và các hệ đào tạo khác của Trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh. Tài liệu này còn có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên Toán ở các trường Cao đẳng Sư phạm và giáo viên Toán các trường phổ thông trong việc tìm hiểu và nghiên cứu hình học.*

Nội dung cuốn bài tập này gồm có bốn chương :

Chương 1 : Bài tập về không gian afin và hình học afin;

Chương 2 : Bài tập về không gian Ơclit và hình học Ơclit;

Chương 3 : Bài tập về không gian xạ ảnh và hình học xạ ảnh.

Chương 4 : Ôn tập

Ở đầu mỗi chương có phần tóm tắt lí thuyết để giúp cho bạn đọc có tài liệu nghiên cứu khi cần thiết. Các đề ra được sắp xếp, lựa chọn dựa theo yêu cầu của môn học. Riêng các bài tập quan trọng được trình bày khá chi tiết giúp bạn đọc nắm được những kiến thức và kĩ năng cơ bản.

Có một số bài tập được trình bày bằng các cách giải khác nhau, đồng thời có kèm theo những điều lưu ý hoặc nhận xét cần thiết, giúp bạn đọc hiểu sâu hơn về nội dung chủ yếu của môn học. Đối với các bài tập có tính chất rèn luyện kĩ năng và ôn tập thì lời giải được trình bày ngắn gọn có tính chất hướng *dẫn hoặc chỉ cho biết kết quả. Đối với chương "CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP" có phần hệ thống lại các kiến thức cơ bản của môn học được trình bày ở đầu chương và sau đó là các đề toán có tính chất ôn tập chung đồng thời kèm theo phần hướng dẫn, hoặc trình bày cách giải tóm tắt, hoặc cho đáp số.*

Tài liệu này đã được chỉnh lí và bổ sung từ các bài giảng mà tác giả đã thực hiện trong nhiều năm; nhưng chắc rằng vẫn còn những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến góp ý của bạn đọc để có thể làm cho chất lượng cuốn sách được tốt hơn trong các lần tái bản sắp tới.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn các đồng chí cán bộ chuyên môn và các đồng chí cán bộ lãnh đạo Nhà xuất bản Giáo dục đã tạo điều kiện thuận lợi cho cuốn sách được ra mắt bạn đọc.

Thành phố Hồ Chí Minh tháng 6 năm 2001

TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

§1. KHÔNG GIAN AFIN

1.Định nghĩa

Cho tập hợp **A** khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *điểm*, cho **V** là một không gian vectơ trên trường **K** và cho ánh xạ :

f: **A** × **A** → **V** được kí hiệu là $f(M, N) = \overrightarrow{MN}$ với các điểm M, N thuộc **A** và vectơ $\overrightarrow{MN}$ thuộc **V**.

Bộ ba (**A**, f, **V**) gọi là *không gian afin* nếu hai tiên đề sau đây được thỏa mãn:

i) Với mọi điểm M thuộc **A** và mọi vectơ $\vec{u}$ thuộc **V** có duy nhất điểm N thuộc **A** sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

ii) Với mọi ba điểm M, N, P thuộc **A** ta luôn có:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

Khi đó ta nói rằng không gian afin (**A**, f, **V**) *liên kết với không gian vectơ* **V** *trên trường* **K** và được gọi tắt là *không gian afin* **A** *trên trường* **K**. Không gian vectơ liên kết **V** còn được kí hiệu là $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, được gọi là *nền* của không gian afin **A**.

Nếu **V** là không gian vectơ thực nghĩa là **K** = **R** ta nói rằng

A là một *không gian afin thực*. Nếu **V** là không gian vectơ phức nghĩa là **K** = **C** ta nói rằng **A** là một *không gian afin phức*.

Không gian afin **A** gọi là *n chiều* nếu dim **V** = n và được kí hiệu dim **A** = n hay $\mathbf{A}^n$ (liên kết với không gian $\mathbf{V}^n$).

2. Một số tính chất đơn giản của không gian afin A

a) Với mọi điểm M ∈ **A** thì $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

b) Với mọi điểm M, N ∈ **A** mà $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ thì M ≡ N.

c) Với mọi cặp điểm M, N ∈ **A** thì $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

d) Với A, B, C, D ∈ **A** ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

e) Với ba điểm bất kì O, A, B ∈ **A** ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

3. Hệ điểm độc lập

a) Định nghĩa. Hệ m+1 điểm $A_0, A_1, ..., A_m$ (m ≥ 1) của không gian afin **A** gọi là *độc lập* nếu m vectơ $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_m}$ của không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính. Hệ gồm một điểm A_0 bất kì (tức trường hợp m = 0) luôn luôn được xem là độc lập.

b) Chú ý. Trong định nghĩa nêu trên, điểm A_0 có vai trò bình đẳng như các điểm A_i khác.

c) Định lí. Trong không gian n chiều $\mathbf{A}^n$ luôn luôn có những hệ m điểm độc lập với 0 ≤ m ≤ n+1. Mọi hệ điểm nhiều hơn n+1 điểm đều không độc lập.

§2. MỤC TIÊU AFIN VÀ TỌA ĐỘ AFIN

1. Mục tiêu afin

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$, một tập hợp có thứ tự gồm n+1 điểm độc lập $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ của $\mathbf{A}^n$ tạo nên một mục tiêu afin của $\mathbf{A}^n$. Điểm E_0 gọi là *gốc* của mục tiêu và các điểm còn lại

E_i gọi là các đỉnh thứ i của mục tiêu.

Ta kí hiệu mục tiêu afin nói trên là $\{E_0; E_i\}$ với i = 1, 2, ..., n.

Chú ý. Các vectơ $\vec{e_i} = \overrightarrow{E_0E_i}$ với i = 1, 2, ..., n là một cơ sở của không gian vectơ nền $\vec{V^n}$ của A^n. Ta có ứng với một mục tiêu afin chỉ có một cơ sở nền duy nhất, nhưng ngược lại với một cơ sở $\{\vec{e_i}\}$, i = 1, 2, ..., n của $\vec{V^n}$ có thể đặt tương ứng với nhiều mục tiêu khác nhau trong A^n. Ta có thể kí hiệu mục tiêu afin ứng với cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ là $\{E_0; \vec{e_i}\}$ trong đó E_0 là gốc của mục tiêu afin.

2. Tọa độ afin của một điểm

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho mục tiêu afin $\{O; \vec{e_i}\}$. Với mỗi điểm X thuộc không gian afin $\mathbf{A}^n$ ta có vectơ $\overrightarrow{OX}$ thuộc $\vec{\mathbf{A}^n}$ và do đó có duy nhất n phần tử $x_1, x_2, ..., x_n$ của trường **K** sao cho:

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}.$$

Bộ n phần tử $(x_1, x_2, ..., x_n)$ có thứ tự đó được gọi là *tọa độ afin của điểm* X đối với mục tiêu đã chọn và kí hiệu :

$X(x_1, x_2, ..., x_n)$ hay $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ hoặc ngắn gọn hơn $X(x_i)$ hay $X = (x_i)$.

Chú ý rằng nếu $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ thì vectơ $\overrightarrow{XY}$ có tọa độ là $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n)$ đối với cơ sở $\varepsilon = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$ của không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}^n}$.

3. Đổi mục tiêu afin

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai mục tiêu afin $\{E_0; E_i\}$ và $\{E'_0; E'_i\}$ lần lượt ứng với hai cơ sở nền là $\{\vec{e_i}\}$ và $\{\vec{e'_i}\}$ với i =1, 2, ..., n. Giả sử các điểm E'_i có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_0; E_i\}$ là:

$$E'_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \quad \text{với } i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Ta có ma trận chuyển C từ cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ là:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ a_{21} - a_{01} & a_{22} - a_{02} & \dots & a_{2n} - a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - a_{01} & a_{n2} - a_{02} & \dots & a_{nn} - a_{0n} \end{bmatrix}$$

Ma trận C cũng được gọi là *ma trận chuyển* từ mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ sang mục tiêu $\{E'_o; E'_i\}$. Ta có det C ≠ 0 và C là không suy biến.

Giả sử X là một điểm tùy ý của không gian afin $\mathbf{A}^n$ và lần lượt có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ và $\{E'_o; E'_i\}$ là $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ thì khi đó công thức biểu thị sự liên hệ tọa độ của cùng một điểm X đối với hai mục tiêu nói trên là công thức đổi mục tiêu sau đây:

$$\boxed{[x] = C^*[x'] + [a_o]}$$

trong đó $[x]$, $[x']$ là ma trận cột tọa độ của điểm X đối với mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ và $\{E'_o; E'_i\}$, C^* là ma trận chuyển vị của ma trận chuyển C, còn $[a_o]$ là ma trận cột tọa độ của điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$.

§3. CÁC PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN AFIN

1. Định nghĩa

Cho không gian afin $\mathbf{A}$ liên kết với không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$. Gọi I là một điểm của $\mathbf{A}$ và $\vec{\alpha}$ là một không gian con của $\vec{\mathbf{A}}$. Khi đó tập hợp những điểm M của $\mathbf{A}$ sao cho $\overrightarrow{IM}$ thuộc $\vec{\alpha}$ được gọi là cái phẳng afin α đi qua điểm I và có phương $\vec{\alpha}$.

$$\alpha = \left\{ M \in \mathbf{A} \,\middle|\, \overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha} \subset \vec{\mathbf{A}} \right\}$$

Nếu α có số chiều bằng m thì α gọi là *cái phẳng m-chiều*, được gọi tắt là *m- phẳng*.

Như vậy 0- phẳng là *điểm*, 1- phẳng là *đường thẳng*, 2- phẳng là *mặt phẳng* và (n-1) - phẳng gọi là *siêu phẳng*.

2. Định lí 1

Nếu α là m-phẳng của không gian afin **A** và có phương $\vec{\alpha}$ thì α là một không gian afin m- chiều liên kết với không gian vectơ $\vec{\alpha}$.

Do đó ta thường kí hiệu m- phẳng afin là $\mathbf{A}^m$.

3. Định lí 2

Qua m+1 điểm độc lập của $\mathbf{A}^n$ có một và chỉ một m-phẳng.

4. Phương trình tham số của m - phẳng

Trong $\mathbf{A}^n$ cho m - phẳng $\mathbf{A}^m$ xác định bởi **m** +1 điểm độc lập:

$$A_o, A_1, A_2, \ldots, A_m.$$

Giả sử đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ cho trước, các điểm A_i có tọa độ là:

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad \text{với } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^m \Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} \in \mathbf{V}^m.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} = t_1\overrightarrow{A_oA_1} + t_2\overrightarrow{A_oA_2} + \ldots + t_m\overrightarrow{A_oA_m}$$

Ta có phương trình tham số của m- phẳng $\mathbf{A}^m$ dưới dạng ma trận là:

$$\boxed{[x] = [a_o] + t_1([a_1] - [a_o]) + t_2([a_2] - [a_o]) + \ldots + t_m([a_m] - [a_o])}$$

Nếu viết dưới dạng tọa độ ta có n phương trình sau:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i = a_{oi} + t_1(a_{1i} - a_{oi}) + t_2(a_{2i} - a_{oi}) + \ldots + t_m(a_{mi} - a_{oi}) \\ \qquad \text{với } i = 1, 2, \ldots, n \end{array}}$$