ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

****

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT BIỂU DIỄN CỦA NHÓM HỮU HẠN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 60.46.05

Người hướng dẫn khoa học: TS. VŨ THẾ KHÔI

Người thực hiện: TRẦN DANH TUYÊN

Thái Nguyên - 2009

Mục lục

Lời nói đầu

Lý thuyết biểu diễn nhóm có nguồn gốc từ lý thuyết đặc trưng của nhóm abel được phát biểu cho các nhóm cyclic bởi Gauss, Dirichlet và sau đó mở rộng sang cho nhóm abel hữu hạn bởi Frobenius và Stickelberger. Lý thuyết biểu diễn của nhóm hữu hạn được phát biểu vào cuối thế kỷ XIX trong các công trình của Frobenius, Schur và Burnside.

Nói một cách đơn giản, lý thuyết biểu diễn nhóm nghiên cứu các cách mà một nhóm tác động trên không gian véctơ bằng các tự đẳng cấu tuyến tính. Lý thuyết biểu diễn nhóm không chỉ là một phần quan trọng trong đại số hiện đại mà còn có nhiều ứng dụng quan trọng trong lý thuyết số, tổ hợp và cả vật lý.

Mục đích của luận văn là đọc hiểu và trình bày lại một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết biểu diễn nhóm hữu hạn và trình bày chứng minh của B.Zagier công thức Frobenius.

Bố cục của luận văn của chúng tôi gồm ba chương:

Chương 1 Một số ví dụ về nhóm và tác động nhóm. Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản như: Nhóm ma trận, tác động nhóm, nhóm đối xứng. Những kiến thức này sẽ được sử dụng trong phần còn lại của luận văn.

Chương 2 Các khái niệm đại số cơ sở của phép biểu diễn nhóm. Trong chương này chúng tôi trình bày các khái niệm và một số ví dụ đơn giản để minh hoạ cho các khái niệm của phép biểu diễn nhóm.

Chương 3 Biểu diễn của nhóm hữu hạn và công thức Frobenius. Đây là chương chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày lại một số kết quả cơ bản của lý thuyết biểu diễn của nhóm hữu hạn và đặc biệt là chúng tôi dã trình bày lại một chứng minh của công thức Frobenius thông qua lý thuyết biểu diễn nhóm.

Qua đây, tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu xắc tới người thầy, người hướng dẫn khoa học của mình, TS. Vũ Thế Khôi, nhờ sự hướng dẫn chỉ bảo tận tình và nghiêm khắc của thầy mà luận văn đã được hoàn thành một cách khoa học và đúng tiến độ. Xin chân thành cảm ơn các thầy cô công tác tại Viện Toán, tại các trường Đại học thuộc Đại học Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy và quan tâm. Xin cảm ơn anh Phạm Hồng Nam, giảng viên khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, cảm ơn bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2009

Học Viên

Trần Danh Tuyên

Chương 1

Một số ví dụ về nhóm và tác động nhóm

Ta nhắc lại một số kiến thức cần dùng trong luận văn.

1.1 Nhóm ma trận

Cho $\mathbf{C}$ là trường số phức, kí hiệu $M_{m,n}(\mathbf{C})$ là tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbf{C}$. $M_{m,n}(\mathbf{C})$ lập nên một $\mathbf{C}$-không gian véc tơ $m \times n$ chiều, trong trường hợp $m = n$ thì ta kí hiệu $M_n(\mathbf{C})$ thay cho $M_{n,n}(\mathbf{C})$. Ta xác định được một *nhóm tuyến tính*:

$$GL(n, \mathbf{C}) := \{A \in M_n(\mathbf{C}), detA \neq 0\}.$$

Ta xác định *nhóm tuyến tính đặc biệt*,

$$SL(n, \mathbf{C}) := \{A \in M_n(\mathbf{C}); detA = 1\}.$$

Ta cũng xác định nhóm *trực giao*:

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbf{R});\ {}^tAA = E_n\},$$

và cho $n = p + q$, thì ta có:

$$O(p, q) := \{A \in M_n(\mathbf{R});\ {}^tAD_{p,q}A = D_{p,q}\},$$

trong đó $D_{p,q}$ là các ma trận đường chéo mà $a_{ii} = 1,\ \forall i = \overline{1, p}$ và các $a_{ii} = -1, \forall i = \overline{p + 1, n}$. Và xác định *nhóm unita*:

$$U(n) := \{A \in M_n(\mathbf{C});\ {}^tA\overline{A} = E_n\}$$

là nhóm khả nghịch.

Cho $n = p + q$ thì các nhóm

$$U(p,q) := \{A \in M_n(\mathbf{R});\ {}^tAD_{p,q}\overline{A} = D_{p,q}\}.$$

Từ nhóm $O(n)$ ta xác định được nhóm con $SO(n)$ của nhóm $O(n)$ như sau:

$$SO(n) := \{A \in O(n); detA = 1\}.$$

$A(n) := \{D(a_1, ..., a_n); a_1, ..., a_n \in \mathbf{C}^*\}$ là ma trận đường chéo với các phần tử $a_1, ..., a_n$ nằm trên đường chéo.

1.2 Tác động nhóm

Trong phần này luôn cho G là một nhóm, phần tử đơn vị là e và χ là một tập.

Định nghĩa 1.2.1. G được gọi là *tác động trái trên* χ nếu tồn tại ánh xạ

$$G \times \chi \to \chi$$
$$(g,x) \mapsto g \cdot x$$

thoả mãn các điều kiện sau:

i) $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$

ii) $e \cdot x = x$

với mọi $g, g' \in G, x \in \chi$.

Chú ý: Đặt $Aut\chi$ là tập hợp tất cả các song ánh từ χ vào χ thì từ định nghĩa ta được đồng cấu nhóm

$$\varphi : G \to Aut\chi$$
$$g \mapsto g \cdot x$$

• Trong trường hợp G tác động trái trên χ ta cũng gọi χ là $G-$*tập trái*.

• Tác động nhóm được gọi là *bắc cầu* nếu mọi cặp $x, x' \in \chi$ thì tồn tại $g \in G$ sao cho $x' = g \cdot x$

• Với mọi $x_0 \in \chi$ ta xác định được tập con $G \cdot x_0$ của χ:

$$G \cdot x_0 := \{g \cdot x_0; g \in G\},$$

$G \cdot x_0$ được gọi là G *quỹ đạo*(chứa x_0).

• Với mọi $x_0 \in \chi$ ta xác định được nhóm con của χ

$$G_{x_0} := \{g \in G, g \cdot x_0 = x_0\}$$

và được gọi là *nhóm đẳng hướng* hay *nhóm ổn định của* x_0.

Ví dụ 1.2.2. Cho $G = GL(n, \mathbf{C})$ và $\chi \subseteq \mathbf{C}^n$, ta xác định được một tác động trái trên χ bởi ánh xạ:

$$\begin{aligned} G \times \chi &\to \chi \\ (A, x) &\mapsto A \cdot x \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbf{C}^n$.

Định nghĩa 1.2.3. Một tập χ được gọi là *không gian thuần nhất* nếu có một nhóm G tác động bắc cầu trên χ.

Định nghĩa 1.2.4. Với mọi $G-$tập, ta xác định χ/G hay χ_G là tập các $G-$quỹ đạo trong χ và χ^G là *tập các điểm bất động* của G, nghĩa là tập các phần tử $x \in \chi$ sao cho $g \cdot x = x$ với mọi $g \in G$.

Chú ý: Nếu χ có cấu trúc đại số, ví dụ nếu χ là không gian véc tơ thì trong trường hợp này ánh xạ:

$$\begin{aligned} \lambda : G &\to \chi \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

là tuyến tính với mỗi $g \in G$.

Định nghĩa 1.2.5. Cho χ và χ' là các $G-$tập trái và $f : \chi \to \chi'$ là một ánh xạ. ánh xạ f được gọi là *đẳng biến* hay $G-$*đồng cấu* nếu với mọi $g \in G$ và $x \in \chi$, ta có :

$$g \cdot f(x) = f(g \cdot x).$$

Cho H là một nhóm con của G, ta định nghĩa *nhóm con của G trong H* là

$$N_G(H) := \{g \in G; gHg^{-1} = H\}.$$

Rõ ràng $N_G(H)$ là nhóm con chuẩn tắc tối đại của G trong H và nhóm $Aut(G/H)$ là đẳng cấu với $N_G(H)/H$. Ta cũng xác định được nhóm con chuẩn tắc $C_G(H) := \{g \in G; ghg^{-1} = h, \forall h \in H\}$, được gọi là *nhóm tâm hoá* của H trong G.

Trong trường hợp đặc biệt $H = G$ nhóm tâm hoá xác định bởi:

$$C_G(G) = \{g \in G; gh = hg, \forall h \in H\} =: C(G).$$

Hoàn toàn tương tự như vậy ta cũng có nhóm tác động phải của một nhóm G trên tập χ:

Định nghĩa 1.2.6. G được gọi là *tác động phải trên χ* nếu tồn tại ánh xạ

$$\begin{aligned} G \times \chi &\to \chi \\ (g, x) &\mapsto x \cdot g \end{aligned}$$

thoả mãn các điều kiện sau:

i) $(x \cdot g) \cdot g' = x \cdot (gg')$

ii) $x \cdot e = x$, $\forall x \in \chi, g, g' \in G$.

Chú ý: Ta có thể đưa nhóm tác động phải về tác động trái và ngược lại nhờ phản đẳng cấu:

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Do đó cho χ là $G-$tập phải thì được tác động trái cho bởi:

$$g \cdot x := x \cdot g^{-1}.$$

1.3 Nhóm đối xứng

Định nghĩa 1.3.1. *Nhóm đối xứng* $\mathfrak{S}_n$ là nhóm của các hoán vị, nghĩa là nhóm tạo bởi các song ánh của n phần tử.

Rõ ràng $Aut\chi$ là nhóm song ánh từ tập χ vào chính tập χ, chọn $\chi_n := \{1, 2, ..., n\}$ thì $\mathfrak{S}_n = Aut\chi_n$.

Chú ý:

• Số phần tử của nhóm $\mathfrak{S}_n$ là $\#\mathfrak{S}_n = n!$

• Mỗi phần tử $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ đều có thể viết dưới dạng tích của các *chuyển vị*, nghĩa là hoán vị ở đó chỉ có hai phần tử chuyển chỗ cho nhau.

• Cho $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, ta xác định *hàm dấu của* σ bởi:

$$Sign(\sigma) := \varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

• Rõ ràng ánh xạ

$$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$$
$$\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$$

là đồng cấu nhóm. Trong đó $\{-1, 1\}$ là nhóm con của nhóm nhân $R^* = R \setminus \{0\}$. $Ker\varepsilon$ là nhóm con chuẩn tắc và được gọi là *nhóm luân phiên*.

• Một nhóm hoán vị luôn phân tích được thành tích của các xích nghĩa là một hoán vị $(i_1, ..., i_r)$ với $i_j \mapsto i_{j+1}$ với $j < r$ và $i_r \mapsto i_1$ nếu $r > 1$ và là đồng nhất nếu $r = 1$.

• Mỗi một hoán vị có một phân tích duy nhất thành một tích các xích rời nhau.

Định nghĩa 1.3.2. Một *phân hoạch* của n là một dãy $(n_1, ..., n_r)$ là các số tự nhiên $n_i \in N$ với $n_i \ge n_j$ nếu $i < j$ và $\sum n_i = n$.

Định lý 1.3.3 ([4] Định lý 0.1). *Số lớp liên hợp của* $\mathfrak{S}_n$ *bằng số* $p(n)$ *các phân hoạch của* n.

Ví dụ 1.3.4. Cho $n = 3$ vì

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 3$$

nên $n = 3$ có phân hoạch là $(1, 1, 1)$; $(2, 1)$; (3). Suy ra $\mathfrak{S}_3$ có ba lớp liên hợp là:

$C_1 = \{id\}$

$C_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

$C_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.