TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

2

BÀI TẬP GIẢI TÍCH

TẬP III

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ - TÍCH PHÂN BỘI
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

ĐH QG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

BÀI TẬP GIẢI TÍCH

Tập III

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ - TÍCH PHÂN BỘI
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

(In lần thứ tư có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Trang

Chương 10

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ CẬN HỮU HẠN

1. Giả sử f(x, y) là hàm số xác định với $x \in [a, b]$ và y thuộc một tập hợp số thực Y nào đó, sao cho với mỗi y cố định thuộc Y hàm f(x,y) khả tích trong đoạn [a,b].

Khi đó

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \qquad (1)$$

là một hàm số xác định trên tập Y và được gọi là tích phân phụ thuộc tham số của hàm f(x, y) trên đoạn [a,b].

2. Các tính chất

a. Tính liên tục: Nếu hàm f(x, y) xác định và liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ thì tích phân phụ thuộc tham số I(y) là một hàm số liên tục trên đoạn [c, d].

b.Tính khả vi:

Giả thiết:

i) Hàm f(x,y) là hàm số xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ và liên tục theo biến $x \in [a, b]$ với mỗi y cố định thuộc đoạn [c, d];

ii) Hàm f(x,y) có đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ là một hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$.

Khi đó tích phân phụ thuộc tham số I(y) là một hàm khả vi trong đoạn [c,d] và

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx, \qquad y \in [c,d].$$

(qui tắc Leibniz).

c. Tính khả tích: Nếu hàm f(x,y) xác định và liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ thì

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

3. Tích phân phụ thuộc tham số với cận tích phân thay đổi

Cho hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ và C_1, C_2 là hai đường cong liên tục nằm trong $\mathcal{D}$ có các phương trình tương ứng là: $x = \alpha(y)$ và $x = \beta(y)$, $y \in [c,d]$.

Giả sử f(x,y) là hàm xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$, khả tích theo x trên [a,b] với mỗi y cố định thuộc đoạn [c,d]. Khi đó

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx, \qquad y \in [c,d] \tag{2}$$

được gọi là tích phân phụ thuộc tham số với cận tích phân thay đổi.

a. Tính liên tục: Giả sử f(x,y) là hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$, $\alpha(y), \beta(y)$ là các hàm liên tục trên đoạn [c,d]. Khi đó tích phân I(y) là hàm liên tục trên [c, d].

b.Tính khả vi:

Giả thiết:

i) Hàm f(x,y) xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$, liên tục theo x trên [a,b] với mỗi y cố định thuộc đoạn [c,d];

ii) Hàm f(x,y) có đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$;

iii) Các hàm $\alpha(y),\beta(y)$ khả vi trong [c,d].

Khi đó tích phân (2) I(y) là hàm khả vi trong đoạn [c,d] và ta có

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f[\beta(y),y].\beta'(y)-f[\alpha(y),y].\alpha'(y),$$

$(y\in[c,d])$.

4. Tích phân

$$I(y) = \int_a^b f(x,y).g(x)dx$$

trong đó f(x,y) là hàm xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$, g(x) là hàm khả tích (hoặc khả tích tuyệt đối theo nghĩa suy rộng) trên đoạn [a,b], có các tính chất tương tự như tích phân (1).

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1038. Tìm $\lim\limits_{y\to 0}\displaystyle\int_0^2 x^2 \cos xy\,dx$

Giải : Gọi [c,d] là đoạn bất kì chứa điểm y = 0. Khi đó hàm $f(x,y) = x^2\cos xy$ liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [0,2] \times [c,d]$. Vì vậy tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int_0^2 x^2 \cos xy dx$ là hàm liên tục theo y trong đoạn [c,d]. Do đó

$$\lim_{y \to 0} I(y) = I(0) = \int_0^2 x^2 \cos x.0 dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

1039. Xét tính liên tục của hàm số

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

trong đó f(x) là hàm liên tục và dương trên đoạn [0,1].

Giải: Xét $y_o \neq 0$ bất kỳ.

Giả sử $y_o > 0$. Khi đó tồn tại số $c > 0$ sao cho $0 < c < y_o < d$, trong đó d là số dương nào đó.

Kí hiệu $\mathcal{D}$ là hình chữ nhật $[0,1] \times [c,d]$.

Theo giả thiết f(x) liên tục trong [0,1], nên hàm dưới dấu tích phân $\frac{yf(x)}{x^2 + y^2}$ liên tục trong $\mathcal{D}$. Do đó hàm F(y) liên tục trong đoạn [c,d], vì vậy F(y) liên tục tại y_o.

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng: F(y) liên tục tại $y_o < 0$.

Vì y_o là điểm khác không tuỳ ý, nên từ chứng minh trên ta suy ra F(y) liên tục với mọi $y \neq 0$.

Ta xét tại điểm $y = 0$. Rõ ràng $F(0) = 0$.

Kí hiệu $m = \inf_{x \in [0,1]} f(x)$. Vì f(x) liên tục và dương trong đoạn [0,1] nên $m > 0$.

Với y cố định, hàm $\varphi(x) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ khả tích trong [0,1], còn hàm f(x) liên tục và dương trên đoạn đó, vì thế áp dụng định lý trung bình suy rộng ta có:

$$F(y) = f(c(y))\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2}dx = f(c(y)).\ \text{arctg}\frac{1}{y},$$

$$\text{với } y \neq 0,\ 0 \le c(y) \le 1.$$

Từ đó với $y \neq 0$

$$|F(y) - F(0)| = |f(c(y))|.\left|\text{arctg}\frac{1}{y}\right| \ge m.\left|\text{arctg}\frac{1}{y}\right|$$

Cho $y \to 0$, $m\left|\text{arctg}\dfrac{1}{y}\right| \to m\dfrac{\pi}{2}$, do đó $F(y) \nrightarrow F(0)$ khi $y \to 0$.

Điều đó chứng tỏ rằng F(y) gián đoạn tại y = 0.

1040. Tính đạo hàm theo tham số của tích phân

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx, \qquad (a > 1)$$

Từ đó tính tích phân I(a).

Giải: Hàm $f(a,x) = \ln(a^2 - \sin^2 x)dx$ liên tục trong miền a > 1 và $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ và có đạo hàm riêng theo a

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x},\ a > 1$$

cũng là hàm liên tục trong miền đó. Vì thế ta có thể đạo hàm theo công thức Leibniz: