

TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH II & III

PHÉP TÍNH VI PHÂN
VÀ TÍCH PHÂN
CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

UYÊN
LIỆU



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH II + III

PHÉP TÍNH VI PHÂN & TÍCH PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

*Dùng cho sinh viên kỹ thuật
(Cao đẳng, đại học, sau đại học)
(In lần thứ ba có sửa chữa và bổ sung)*



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI**

LỜI GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây yêu cầu về giảng dạy và học tập môn toán cao cấp trong các trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học) ngày càng cấp bách về số lượng và chất lượng. Các sinh viên kỹ thuật cần nhiều giáo trình toán cao cấp theo hướng hiện đại về lý thuyết cũng như bài tập. Các thầy giáo cũng cần nhiều bộ giáo trình như thế để tham khảo, chuẩn bị bài giảng và chọn cho mình một chiến lược giảng dạy thích hợp. Trong lúc đó số lượng các giáo trình về toán cao cấp dành cho các trường kỹ thuật chỉ đếm được trên đầu ngón tay. Nhiều bộ giáo trình về toán cao cấp đã được xuất bản hiện nay chưa đạt trình độ cao, sâu sắc, đáp ứng được yêu cầu học toán và dạy toán cho các kỹ sư trong thời đại khoa học kỹ thuật và thông tin phát triển bùng nổ như hiện nay.

Giáo trình này của tác giả ra đời đáp ứng nhiều nhu cầu hết sức cấp bách hiện nay về mặt giáo trình toán cao cấp cho sinh viên các trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học). Về toàn cục nội dung của giáo trình này bao gồm các vấn đề cơ bản và quan trọng nhất của toán học cao cấp cần thiết cho một kỹ sư: đó là những cơ sở quan trọng của phép tính vi phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, các định lý và phương pháp cơ bản của phép tính tích phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, cơ sở của giải tích vecteur, hình học vi phân, lý thuyết cơ bản về phương trình vi phân, chuỗi hàm, chuỗi Fourier và tích phân Fourier. Các thông tin đề cập đến các vấn đề trên của tác giả là cơ bản, đảm bảo tính chính xác về nội dung toán học. Các chứng minh đưa ra đều ngắn gọn, chặt chẽ.

Đặc biệt phần đề cập đến lý thuyết về hàm nhiều biến là một vấn đề rất tinh tế trong giải tích toán học, vì ở đây nhiều tình huống xảy ra phức tạp hơn nhiều ở trong Topo nhiều chiều so với Topo một chiều. Do nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích toán học dựa trên kinh nghiệm giảng dạy toán học cho các trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, tác giả trình bày toàn bộ giáo trình và nói riêng nội dung của phần này rất đầy đủ và hiện đại (ví dụ phần đề cập đến cực trị của hàm nhiều biến, tác giả đã sử dụng nhuần nhuyễn các định lý về dạng toàn phương để chứng minh các điều kiện đủ của cực trị).

Giáo trình được viết một cách sáng sủa và chặt chẽ theo một dây chuyền tư duy logique, đó là hai yếu tố rất khó khi đề cập đến một vấn đề toán học. Thông thường để vấn đề đặt ra đảm bảo tính chặt chẽ và chính xác của toán học thì người đọc sẽ rất khó hiểu, hoặc phải có một khả năng tư duy tốt, nói cách khác là một thói quen tư duy toán học. Ở đây tác giả kết hợp được hai điều nói trên: vẫn không mất chính xác mà vẫn đảm bảo tính dễ hiểu cho sinh viên (ví dụ phần xây dựng hệ tiên đề về số thực, phân tích phân phụ thuộc tham số, tích phân suy rộng...).

Giáo trình này đã đề cập đến một số vấn đề khá hiện đại của toán học mà trước đây trong các giáo trình về toán cao cấp ít đề cập tới như khái niệm không gian métrique, hội tụ đều, chuỗi Fourier tổng quát,... Ngoài ra tác giả còn đưa vào những bổ sung rất cần thiết cho người kỹ sư như các phần: toán tử Laplace giải phương trình vi phân, các bài toán cơ bản của vật lý toán học (truyền nhiệt, truyền sóng, ...), phân phụ lục các công thức cơ bản nhất của toán học. Việc mạnh dạn đưa vào giáo trình các vấn đề như thế là một việc làm rất cần thiết để nâng cao chất lượng đào tạo người kỹ sư, vì ngày nay người kỹ sư cần toán học ở mức độ sâu sắc và hiện đại trong quá trình học tập để tiếp cận với công nghệ và tin học hiện đại.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 1997

GS. TSKII Lê Hùng Sơn

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm vừa qua, khoa toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã nghiên cứu đề tài: "Xây dựng nội dung chương trình toán cao cấp cho các ngành kỹ thuật trên cơ sở trung học, học sinh đã học toán theo chương trình mới (12 năm)" và đã đề ra được một chương trình toán cao cấp theo yêu cầu đó.

Qua giảng dạy môn giải tích ở Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, và dựa theo chương trình toán đã đề ra, tôi viết giáo trình này, nhằm mục đích giúp các sinh viên kỹ thuật có tài liệu tham khảo, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo, để trình độ toán của người kỹ sư của ta được hoà nhập vào khu vực và quốc tế

Trong phần đầu của giáo trình, vì sinh viên đã được học một số nội dung ở trung học, nên mục đích là hệ thống hoá và nâng lên một mức độ tương đối hiện đại (Phương pháp tiên đề về số thực) nhằm giúp sinh viên có một tư duy logique chặt chẽ trong việc học tập toán và các ngành khác.

Trong phần sau của giáo trình, dựa trên cơ sở phần đầu đã trình bày, giáo trình cung cấp những kiến thức cơ bản của giải tích từ thấp đến cao phù hợp với yêu cầu của người kỹ sư trong hiện tại và tương lai.

Giáo trình này có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên kỹ thuật ở cả ba đối tượng: cao đẳng, đại học, và sau đại học.

Giáo trình được chia thành hai tập:

Tập I: Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến (Giải tích I)

Tập II: Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến. Phương trình vi phân và lý thuyết chuỗi (Giải tích II + III).

Các phần nâng cao và các bài tập khó đều đánh dấu *.

(tương ứng với ba học kỳ đầu của mỗi khoá học theo chương trình của bộ đã ban hành).

Tôi rất cảm ơn Hội đồng khoa học khoa Toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội và các bạn đồng nghiệp trong khoa đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi viết giáo trình này, nhất là các đồng chí Trần Xuân Hiến, Đặng Khải, Lê Hùng Sơn, Dương Quốc Việt, Nguyễn Cảnh Lương đã đọc rất kỹ bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Giáo trình này tuy xuất bản lần hai, vẫn không tránh khỏi thiếu sót mong bạn đọc cho nhiều ý kiến.

Tác giả

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	3
Lời nói đầu	5
Chương 8	15
ÁP DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC	
A- ĐƯỜNG CONG PHẪNG	15
§1. Khảo sát sơ bộ	15
1.1. Phương trình của đường cong	16
1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến	17
1.3. Vi phân cung	18
§2. Độ cong	18
2.1. Định nghĩa	19
2.2. Công thức tính độ cong	21
§3. Đường tròn mặt tiếp – Bán kính cong và tâm cong	21
3.1. Định nghĩa	21
3.2. Công thức tính bán kính cong	22
3.3. Toạ độ của tâm cong	26
§4. Đường túc bé và đường thân khai	26
4.1. Định nghĩa	26
4.2. Tính chất	28
§5. Hình bao của một họ đường cong	31
5.1. Điểm bất thường của đường cong	31
5.2. Hình bao của họ đường cong	34
B- ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN	39
§1. Sơ lược về giải tích vecteur	39
1.1. Hàm vecteur đối vô hướng	39
1.2. Đạo hàm của hàm vecteur	40
§2. Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường	43

2.1. Phương trình	43
2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến. Tam diện Frénet	45
§3. Độ cong và độ xoắn	49
3.1. Độ cong	49
3.2. Độ xoắn	52
C- MẶT, TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN VỚI MỘT MẶT	57
§1. Mặt cho theo phương trình không giải	58
§2. Mặt cho theo phương trình tham số	61
Bài tập	63
Hướng dẫn và trả lời bài tập	67

Chương 9. TÍCH PHÂN BỘI

A - TÍCH PHÂN KÉP

§1. Khái niệm tổng quát	73
1.1. Định nghĩa	73
1.2. Điều kiện khả tích	74
1.3. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân kép	74
1.4. Tính chất của tích phân kép	76
§2. Cách tính tích phân kép	77
2.1. Tọa độ Descartes	77
2.2. Tọa độ cực	86
2.3. Quy tắc tổng quát đổi biến số của tích phân kép	90
§3. Áp dụng của tích phân kép	95
3.1. Áp dụng hình học	95
3.2. Áp dụng cơ học	101

B - TÍCH PHÂN BỘI BA

§1. Khái niệm tổng quát	103
1.1. Định nghĩa	103
1.2. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân bội ba	104
§2. Cách tính tích phân bội ba	105
2.1. Tọa độ Descartes	105
2.2. Tọa độ cong – quy tắc tổng quát đổi biến số	116
§3. Áp dụng của tích phân bội ba	118

3.1. Áp dụng hình học	118
3.2. Áp dụng cơ học	120
C - TÍCH PHÂN BỘI SUY RỘNG	
§1. Định nghĩa	122
1.1. Miền lấy tích phân là vô hạn (không bị chặn)	122
1.2. Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn	124
§2. Cách tính	125
Bài tập	129
Trả lời bài tập	138

Chương 10. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. Tích phân thường phụ thuộc tham số	149
1.1. Định nghĩa	149
1.2. Định lý	149
§2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số	153
2.1. Định nghĩa	153
2.2. Tiêu chuẩn	154
2.3. Định lý	155
§3. Hàm Euler	158
3.1. Hàm Gamma Γ	158
3.2. Hàm Beta B	159
3.3. Liên hệ giữa Γ và B	160
3.4. Áp dụng	161
Bài tập	162
Trả lời bài tập	166

Chương 11. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

A- TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. Tích phân đường loại một	169
1.1. Định nghĩa	169
1.2. Ý nghĩa cơ học	171
1.3. Cách tính	171
§2. Tích phân đường loại hai	173