ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN SONG HÀ

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM TRONG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÉC TƠ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN SONG HÀ

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM TRONG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÉC TƠ ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2009

Mục lục

Lời nói đầu

Do ý nghĩa quan trọng về cả lý thuyết lẫn thực tế, bài toán bất đẳng thức biến phân đã được nghiên cứu mạnh mẽ trong khoảng 30 năm trở lại đây. Bài toán bất đẳng thức biến phân liên quan đến nhiều bài toán khác của giải tích phi tuyến (bài toán tối ưu, bài toán cân bằng, bài toán bù,...). Nhiều vấn đề của bài toán biến phân (tồn tại nghiệm, ổn định nghiệm,...) đã được nghiên cứu khá kỹ. Tuy nhiên, theo chúng tôi, trong khi cấu trúc tập nghiệm (tồn tại nghiệm, tính liên thông, tính co rút được) của bài toán tối ưu đa mục tiêu đã được quan tâm nghiên cứu nhiều, thì cấu trúc tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân còn chưa được quan tâm đầy đủ. Mục đích của luận văn này là trình bày các kết quả của các bài báo [4], [9], [11]. Đồng thời chúng tôi cũng trình bày một số kết quả của bản thân về vấn đề này.

Luận văn này nghiên cứu tính liên thông của tập nghiệm trong bài toán bất đẳng thức biến phân với tập chấp nhận được không nhất thiết compact. Vấn đề trung tâm, xuyên suốt các chương của luận văn là trả lời cho các câu hỏi:

Với điều kiện nào thì bài toán bất đẳng thức biến phân có nghiệm?

Với điều kiện nào thì tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân là một tập liên thông?

Nếu tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân là không liên thông thì tập nghiệm đó có cấu trúc như thế nào?

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1 trình bày các kiến thức chung về bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ và các bài toán liên quan.

Chương 2 xây dựng các ví dụ làm sáng tỏ lý thuyết đã trình bày ở chương 1 và đưa ra một số nhận xét về cấu trúc và tính liên thông của tập nghiệm.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đối với thầy hướng dẫn đã tận tình giúp đỡ để có được các kết quả trong luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đối với Trung tâm Đào tạo Sau đại học Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Khoa Toán trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, tập thể lớp cao học Toán - K15, bạn bè đồng nghiệp về sự quan tâm giúp đỡ. Và cuối cùng, xin cảm ơn những người thân trong gia đình của tôi đã giúp đỡ, động viên và khích lệ rất nhiều trong thời gian dài học tập.

Các kí hiệu

• $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$

• $\langle x, y\rangle$ là tích vô hướng của hai phần tử x và y trong không gian Hilbert.

• $\|x\|$ là chuẩn của phần tử x trong không gian Hilbert.

• $intA$ là phần trong của A.

• clA là bao đóng của A.

• ∂A là biên của A.

• $\bar{B}(x_0, \epsilon)$ là hình cầu đóng tâm x_0, bán kính ϵ.

• $B(x_0, \epsilon)$ là hình cầu mở tâm x_0, bán kính ϵ.

• $G : X \rightrightarrows Y$ hoặc $G : X \rightrightarrows 2^Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian tôpô X, Y.

• $A \in \mathbb{R}^{r\times n}$ là ma trận cấp $r \times n$ và A^T là chuyển vị của ma trận A.

• $x \in \mathbb{R}^n$ thì x^T là chuyển vị của véc tơ x.

• $N_\Delta(x)$ là nón pháp tuyến của Δ tại x.

• $0^+\Delta$ là nón lùi xa của tập Δ.

Chương 1

Cấu trúc và tính liên thông của tập nghiệm trong bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ đơn điệu

1.1 Bất đẳng thức biến phân véc tơ đơn điệu

1.1.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân

Giả sử $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ là tập con lồi, đóng, khác rỗng, $F : \Delta \to \mathbb{R}^n$ là một toán tử (ánh xạ) cho trước.

Định nghĩa 1.1.1.

Bài toán tìm điểm $\bar{x} \in \Delta$ thỏa mãn

$$\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \Delta, \tag{1.1}$$

được gọi là *bài toán bất đẳng thức biến phân (variational inequality problem)* hay, đơn giản là *bất đẳng thức biến phân (variational inequality)* và được kí hiệu là VI.

Tập nghiệm $Sol(\mathrm{VI})$ của VI là tập tất cả $\bar{x} \in \Delta$ thỏa mãn (1.1).

Nhận xét 1.1.2.

Bài toán bất đẳng thức biến phân (1.1) có thể viết dưới dạng sau:

Tìm điểm $\bar{x} \in \Delta$ sao cho

$$\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \notin -\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \quad \forall y \in \Delta. \tag{1.2}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\bar{x} \in Sol(\text{VI})$ khi và chỉ khi $0 \in F(\bar{x}) + N_\Delta(\bar{x})$, trong đó $N_\Delta(\bar{x})$ là nón pháp tuyến của Δ tại $\bar{x}$, định nghĩa bởi

$$N_\Delta(\bar{x}) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in \Delta\} & \text{nếu } \bar{x} \in \Delta, \\ \emptyset & \text{nếu } \bar{x} \notin \Delta. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.1.2 Các định lí tồn tại nghiệm

Mệnh đề 1.1.3.

Giả sử $\bar{x} \in \Delta$. Nếu tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \Delta \cap \bar{B}(\bar{x}, \varepsilon). \tag{1.4}$$

Khi ấy $\bar{x} \in Sol(\text{VI})$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $\varepsilon > 0$ thỏa mãn (1.4). Rõ ràng, với mỗi $y \in \Delta$ tồn tại $t =\in (0, 1)$ sao cho $z_t := \bar{x} + t(y - \bar{x})$ thuộc tập $\Delta \cap \bar{B}(\bar{x}, \varepsilon)$. Theo (1.4), $0 \leq \langle F(\bar{x}), z_t - \bar{x} \rangle = t\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle$. Từ đây suy ra rằng $\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $y \in \Delta$. Do đó $\bar{x} \in Sol(\text{VI})$. □

Mệnh đề 1.1.3 chỉ ra rằng mọi nghiệm địa phương của bài toán bất đẳng thức biến phân (nghiệm của (1.4)) cũng là nghiệm toàn cục (nghiệm của (1.1)).

Định lí Hartman-Stampacchia dưới đây là định lí cơ bản về sự tồn tại nghiệm trong bất đẳng thức biến phân. Nó được chứng minh nhờ định lí điểm bất động Brouwer.

Định lý 1.1.4. *(Xem [5] trang 12).*

Nếu $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ là khác rỗng, lồi, compact và $F : \Delta \to \mathbb{R}^n$ là liên tục, thì bài toán VI *có nghiệm.*

Với điều kiện phù hợp *(điều kiện bức - coercivity conditions)*, chúng ta có định lí tồn tại cho trường hợp tập hạn chế Δ không compact.

Định lý 1.1.5. *(Xem [5] trang 14).*

Giả sử $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi, đóng, khác rỗng và $F : \Delta \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ liên tục. Nếu tồn tại $x^0 \in \Delta$ sao cho

$$\frac{\langle F(y) - F(x^0), y - x^0 \rangle}{\|y - x^0\|} \to +\infty \text{ khi } \|y\| \to +\infty,\ y \in \Delta, \tag{1.5}$$

thì bài toán VI *có nghiệm.*

Nhận xét 1.1.6.

Biểu thức (1.5) có ý nghĩa là: Với $\gamma > 0$ cho trước, có thể tìm được một số $\rho > 0$ sao cho

$$\frac{\langle F(y) - F(x^0), y - x^0 \rangle}{\|y - x^0\|} \geq \gamma \quad \text{đúng với mọi } y \in \Delta \quad \text{thỏa mãn } \|y\| > \rho.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu Δ là compact thì với mọi $x^0 \in \Delta$ điều kiện (1.5) được thỏa. Nếu tồn tại $x^0 \in \Delta$ sao cho (1.5) xảy ra thì ta nói rằng điều kiện bức *(coercivity condition)* được thỏa mãn. Điều kiện bức đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu bất đẳng thức biến phân trong trường hợp tập hạn chế Δ không compact. Chú ý rằng (1.5) chỉ là một trong rất nhiều dạng của điều kiện bức.

Nếu tồn tại $x^0 \in \Delta$ và $\alpha > 0$ sao cho

$$\langle F(y) - F(x^0), y - x^0 \rangle \geq \alpha \|y - x^0\|^2, \quad \forall y \in \Delta \tag{1.6}$$

thì (1.5) được thỏa mãn.

Nếu tồn tại một số $\alpha > 0$ sao cho

$$\langle F(y) - F(x), y - x \rangle \geq \alpha \|y - x\|^2, \quad \forall x \in \Delta, \quad \forall y \in \Delta, \tag{1.7}$$

thì (1.6) được thỏa mãn. Do đó (1.5) cũng được thỏa mãn.