ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Thị Xuân Mai

VỀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP CAO TRONG TỐI ƯU KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Thị Xuân Mai

VỀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP CAO TRONG TỐI ƯU KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS ĐỖ VĂN LƯU

THÁI NGUYÊN – 2009

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

Do nhu cầu của kinh tế và kỹ thuật, lý thuyết tối ưu hoá đã phát triển mạnh mẽ và ngày càng thu được nhiều kết quả quan trọng. Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu hoá. Các điều kiện tối ưu cấp cao được nghiên cứu bởi nhiều tác giả và dưới nhiều ngôn ngữ đạo hàm hoặc đạo hàm theo phương khác nhau (xem chẳng hạn [2] – [10]).

Năm 2002, I.Ginchev [5] đưa ra khái niệm đạo hàm theo phương cấp cao cho một hàm giá trị thực mở rộng và thiết lập các điều kiện tối ưu cấp cao cho bài toán tối ưu không trơn không ràng buộc. B.Jiménez ([6] , 2002) đưa ra khái niệm cực tiểu Pareto địa phương chặt cấp *m* và cực tiểu Pareto địa phương chặt cho bài toán tối ưu đa mục tiêu. Sử dụng các khái niệm cực tiểu chặt của Jiménez [6], Đ.V.Lưu và P.T.Kiên [7] đã dẫn các điều kiện cần và đủ cho cực tiểu Pareto địa phương chặt cấp *m* và cực tiểu Pareto địa phương chặt của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn với ràng buộc tập trong không gian định chuẩn, dưới ngôn ngữ đạo hàm theo phương cấp cao của Ginchev [5].

Luận văn tập trung trình bày các điều kiện tối ưu cấp cao dưới ngôn ngữ đạo hàm theo phương cấp cao của I.Ginchev trên và dưới cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu không trơn không có ràng buộc và bài toán đa mục tiêu không trơn với ràng buộc tập.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương I trình bày các điều kiện tối ưu cấp cao của I.Ginchev [5] cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu không trơn, không có ràng buộc trong không gian Banach. Kết quả chỉ ra rằng với các điểm cực tiểu cô lập, điều kiện đủ cũng là điều kiện cần, và như vậy ta nhận được một điều kiện đặc trưng cho cực tiểu cô lập.

Chương II trình bày các nghiên cứu về các điểm cực tiểu Pareto địa phương chặt cấp *m* và cực tiểu Pareto địa phương chặt của B.Jiménez [6] và các điều kiện cần và đủ cho các điểm cực tiểu yếu, cực tiểu Pareto địa phương chặt cấp *m* và cực tiểu Pareto địa phương chặt của Đ.V.Lưu và P.T.Kiên [7] cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn trong không gian định chuẩn với ràng buộc tập, dưới ngôn ngữ đạo hàm theo phương cấp cao của I.Ginchev [5].

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS.Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán – Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên cùng các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá học, xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các bạn cùng lớp cao học Toán K15 đã luôn quan tâm, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và làm luận văn.

Tác giả

Chương I

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP CAO CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐƠN MỤC TIÊU KHÔNG TRƠN KHÔNG CÓ RÀNG BUỘC

Năm 2002, I.Ginchev [5] đưa ra một khái niệm đạo hàm theo phương cấp cao cho các hàm giá trị thực mở rộng xác định trên không gian Banach và thiết lập các điều kiện tối ưu cấp cao cho bài toán tối ưu không trơn không có ràng buộc. Các kết quả trình bày trong chương này là của I.Ginchev [5].

1.1. ĐẠO HÀM THEO PHƯƠNG CẤP CAO GINCHEV VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP CAO

Giả sử E là không gian Banach thực, [redacted] là tập các số thực và [redacted] $\} \cup \{+\infty\}$. Ta sẽ đưa vào đạo hàm theo phương cấp cao cho hàm không trơn $f : E \to$ [redacted] tại điểm $x^0 \in E$ để dẫn điều kiện tối ưu cấp cao cho bài toán tối ưu :

$$f(x) \to min.$$

Ở đây ta xét hàm f không trơn, thậm chí f không nhất thiết liên tục.

Nhắc lại: điểm $x^0 \in E$ gọi là *điểm cực tiểu địa phương* của f nếu tồn tại lân cận U của x^0 sao cho

$$f(x) \geq f(x^0), \forall x \in U.$$

Nếu bất đẳng thức này chặt với $x \neq x^0$ thì x^0 được gọi là *cực tiểu địa phương chặt*.

Ký hiệu B và S tương ứng là hình cầu đơn vị $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ và mặt cầu đơn vị $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ trong E. Ta chỉ cần xét các phần tử của S thay cho các phương (khác 0) trong E. Ký hiệu $\mathscr{S}$ là tôpô trên S. Tôpô $\mathscr{S}$ được dùng để định nghĩa đạo hàm theo phương của *f*. Ta chỉ hạn chế xét tôpô mạnh, tôpô yếu, tôpô rời rạc và tôpô phản rời rạc (tôpô tầm thường). Tôpô mạnh và tôpô yếu trên S cảm sinh tương ứng từ tôpô mạnh (tôpô chuẩn) và tôpô yếu trên E. Mỗi tập con của S là mở đối với tôpô rời rạc, còn đối với tôpô phản rời rạc trên S, chỉ có hai tập mở là S và tập rỗng.

Lấy $u \in$ S. Ta định nghĩa *đạo hàm dưới cấp không* của f tại x_0 theo phương u bởi công thức

$$f_-^{(0)}(x^0, u) = \liminf_{(t,u') \to (+0,u)} f(x^0 + tu'),$$

trong đó $u' \in$ S. Chú ý rằng trong giới hạn trên, ta bắt đầu với đạo hàm cấp không để bao hàm được cả những hàm không liên tục trong lý thuyết. Đạo hàm $f_-^{(0)}(x^0, u)$ luôn tồn tại và là một phần tử của $\overline{\blacksquare}$.

Với mỗi số nguyên dương n và mỗi phương $u \in$ S, ta thừa nhận rằng: đạo hàm dưới cấp n $f_-^{(n)}(x^0, u)$ theo phương u tồn tại và là một phần tử của $\overline{\blacksquare}$ khi và chỉ khi các đạo hàm $f_-^{(i)}(x^0, u)$, $i = 0, 1, ..., n - 1$ tồn tại trong $\blacksquare$. Ta định nghĩa *đạo hàm theo phương dưới cấp n* như sau :

$$f_-^{(n)}(x^0,u) = \liminf_{(t,u')\to(+0,u)} \frac{n!}{t^n}\left[f(x^0+tu') - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} f_-^{(i)}(x^0,u) \right]. \qquad (1.1)$$

Vì $f_-^{(i)}(x^0,u) \in \blacksquare$ với $i = 0, ..., n - 1$, chỉ có số hạng $f(x^0+tu')$ trong (1.1) có thể nhận giá trị vô hạn. Do đó biểu thức $\infty - \infty$ không thể xuất hiện trong (1.1).

Ta sẽ dùng khái niệm đã đưa vào để dẫn điều kiện tối ưu cấp cao. Liên quan đến tính tối ưu không trơn, các điều kiện cấp cao sau đây là quan trọng. Ở đây $u \in S$ là một phương cố định và n là một số dương.

$\left(S_0(x^0,u)\right)$ $\quad f_-^{(0)}(x^0,u) > f(x^0)$,

$\left(S_n(x^0,u)\right)$ $\quad f_-^{(0)}(x^0,u) = f(x^0),\ f_-^{(i)}(x^0,u) = 0\ (i = 1,...,n-1)$

và $f_-^{(n)}(x^0,u) > 0$,

$\left(N_0(x^0,u)\right)$ $\quad f_-^{(0)}(x^0,u) \geq f(x^0)$,

$\left(N_n(x^0,u)\right)$ Nếu $f_-^{(0)}(x^0,u) = f(x^0)$ và $f_-^{(i)}(x^0,u) = 0\ (i = 1,...,n-1)$ thì

$f_-^{(n)}(x^0,u) \geq 0$.

Định lý 1.1(Điều kiện cần cấp cao)

Giả sử x^0 là điểm cực tiểu địa phương của hàm $f : E \to \overline{\blacksquare}$. Giả sử $u \in S$ và $n = n(u)$ là số nguyên không âm tuỳ ý sao cho tất cả các đạo hàm $f_-^{(i)}(x^0,u)$, $i = 0,..., n$, tồn tại.

Khi đó tất cả các điều kiện $\left(N_i(x^0,u)\right)$, $i = 0, ..., n$ đều thỏa mãn.

Chứng minh

Lấy α > 0 sao cho

$$f(x) \geq f(x^0) \text{ với } \|x - x^0\| < \alpha .$$

Lấy $u \in \mathrm{S}$. Với $u' \in \mathrm{S}$ và $0 < t < \alpha$, ta có

$$f(x^0 + tu') - f(x^0) \geq 0.$$

Do đó, $f_-^{(0)}(x^0,u) \geq f(x^0)$. Đây chính là điều kiện $\left(N_0(x^0,u)\right)$.

Mặt khác, giả sử với *n = n(u)*, các đạo hàm $f_-^{(i)}(x^0,u)$, *i = 0,..., n* tồn tại, $f_-^{(0)}(x^0,u) = f(x^0)$ và $f_-^{(i)}(x^0,u) = 0$ $(i = 1,...,n-1)$.

Khi đó,

$$\frac{n!}{t^n}\left[f(x^0 + tu') - f_-^{(0)}(x^0,u) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t^i}{i!} f_-^{(i)}(x^0,u) \right]$$

$$= \frac{n!}{t^n}\left[f(x^0 + tu') - f_-^{(0)}(x^0,u) \right] \geq 0 .$$

Vì vậy $f_-^{(n)}(x^0,u) \geq 0$. Đây chính là điều kiện $\left(N_{\mathrm{n}}(x^0,u)\right)$.

Để có điều kiện đủ, ta cần có bổ đề sau đây

Bổ đề 1.1

Giả sử hàm $f: E \to$ ■. Lấy $x^0 \in E$ và $u \in \mathrm{S}$ sao cho tồn tại một số nguyên không âm n để điều kiện $\left(\mathrm{S}_{\mathrm{n}}(x^0,u)\right)$ thoả mãn.

Khi đó, tồn tại số $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$ và một lân cận U = U(u) ⊂ S của u (đối với tôpô $\mathcal{S}$) sao cho $f(x^0 + tu') > f(x^0)$ với mọi 0 < t < ε(u) và $u' \in U(u)$.

Chứng minh

Giả sử $\left(S_0(x^0,u)\right)$ đúng. Lấy số α thoả mãn

$$f_-^{(0)}(x^0,u) > \alpha > f(x^0).$$

Từ định nghĩa của $f_-^{(0)}(x^0,u)$ suy ra tồn tại $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$ và lân cận *U* = *U(u)* ⊂ S của *u* sao cho

$$f(x^0+tu') > \alpha > f(x^0) \text{ với mọi } 0 < t < \varepsilon \text{ và } u' \in U(u).$$

Giả sử điều kiện $\left(S_n(x^0,u)\right)$ thoả mãn với số dương *n* nào đó, và số α thoả mãn $f_-^{(n)}(x^0,u) > \alpha > 0$.

Do $f_-^{(0)}(x^0,u) = f(x^0),\ f_-^{(i)}(x^0,u) = 0\ (i = 1,...,n-1)$, nên ta có

$$f(x^0+tu') - f(x^0) = \frac{1}{n!}\frac{n!}{t^n}\left[f(x^0+tu') - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}f_-^{(i)}(x^0,u)\right]t^n.$$

Theo định nghĩa của $f_-^{(n)}(x^0,u)$, với số dương *t* đủ nhỏ và u' đủ gần *u*, ta có

$$f(x^0+tu') - f(x^0) > \frac{1}{n!}\alpha t^n > 0\ .$$

Định lý 1.2 (Điều kiện đủ cấp cao)

Giả sử hàm $f: E \to \overline{\blacksquare}$, $x^0 \in E$ *và S là compact đối với tôpô* $\mathscr{S}$*. Giả sử với mỗi* $u \in$ *S, tồn tại số nguyên không âm n = n(u) sao cho điều kiện* $\left(S_n(x^0,u)\right)$ *thoả mãn.*

Khi đó, x^0 *là cực tiểu địa phương chặt của hàm f.*

Chứng minh

Theo bổ đề 1.1. với mỗi $u \in$ S, tồn tại số $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$ và một lân cận *U* = *U(u)* ⊂ S của *u* (đối với tôpô $\mathscr{S}$) sao cho