PHAN BÁ NGỌC

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLAXƠ

(DÙNG CHO HỌC SINH CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP

PHAN BÁ NGỌC

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLAXƠ

(DÙNG CHO HỌC SINH CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP

HÀ NỘI — 1980

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu này gồm nội dung phát triển của các bài giảng về « Hàm biến phức và phép biến đổi Laplaxơ » cho học sinh các khoa Điện và Vô tuyến điện, trường Đại học Bách khoa Hà nội.

Vì sách được viết nhằm đối tượng chủ yếu là học sinh các trường đại học kỹ thuật, nên khi biên soạn, chúng tôi chú trọng nhiều tới ý nghĩa các khái niệm và cách vận dụng các định lý hơn là việc trình bày cơ sở toán học chặt chẽ.

Về mặt sư phạm, chúng tôi đã cố gắng trình bày thật tỷ mỉ, nêu cách đặt vấn đề và cách giải quyết rõ ràng.

Cuối mỗi chương đều có một số bài tập. Đáp số các bài tập, bạn đọc có thể tìm ở cuối sách.

Sách này cũng có thể dùng được cho các kỹ sư.

Soạn một giáo trình có chất lượng tốt là một việc hết sức khó khăn. Khi soạn, chắc không tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong bạn đọc góp ý phê bình.

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi đã được các đồng chí trong Tổ biên tập sách khoa học tự nhiên Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp giúp đỡ rất nhiều, chúng tôi xin thành thật cảm ơn.

TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

SỐ PHỨC

Trong giáo trình giải tích, chúng ta đã học khái niệm số thực. Số thực bao gồm những số hữu tỷ như : 2; 5; 78; $\frac{7}{16}$; ... và các số vô tỷ như : 2; e;

Bình phương của mọi số thực đều là một số không âm. Cho nên nếu chỉ biết số thực, thì không thể lấy căn bậc hai của một số âm, và sẽ không giải được mọi phương trình bậc hai với hệ số thực. Chẳng hạn, phương trình

$$x^2 + 1 = 0$$

không có nghiệm thực.

Để khắc phục trở ngại đó, người ta đưa vào khái niệm số phức. Việc đưa vào khái niệm số phức cũng như xác định các phép toán về số phức phải đạt được yêu cầu sao cho các số thực và các phép toán trên tập các số thực, có thể xem là trường hợp riêng của số phức và các phép toán trên tập các số phức.

§1. Định nghĩa số phức

Ta gọi số phức là một biểu thức có dạng $x + iy$, trong đó x và y là những số thực, còn số i được gọi là *đơn vị ảo*. Các số thực x và y lần lượt được gọi là phần thực và phần ảo của số phức $x + iy$. Ta thường ký hiệu

$$z = x + iy$$
$$x = \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}(x + iy)$$
$$y = \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}(x + iy)$$

Re : Real Thực
Im : Image ảo

Người ta thường ký hiệu tập hợp tất cả các số phức là **C**.

Vậy $$\mathbf{C} = \{z = x + iy \mid x \in R,\ y \in R\}$$

trong đó R là tập hợp tất cả các số thực

Nếu $y = 0$, thì ta có $z = x$, nghĩa là số thực là trường hợp riêng của số phức, có phần ảo bằng 0.

Nếu $x = 0$, thì ta có $z = iy$, những số này được gọi là số thuần túy ảo.

Số phức $x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = x + iy$ và được ký hiệu là $\bar{z}$.

Số phức $-x - iy$ được gọi là số phức đối của số phức $z = x + iy$ và được ký hiệu là $(-z)$.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có phần thực bằng nhau, phần ảo bằng nhau, nghĩa là $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$. Khi đó ta viết $z_1 = z_2$.

§2. Các phép tính về số phức

1. Phép cộng. Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Ta gọi số phức $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ là tổng của hai số phức z_1 và z_2. Khi đó ta viết $z = z_1 + z_2$.

Từ định nghĩa trên, có thể suy ra dễ dàng các tính chất của phép cộng :

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{(giao hoán)}$$
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \text{(kết hợp)}.$$

2. Phép trừ. Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Ta gọi số phức z là hiệu của z_1 và z_2 nếu $z + z_2 = z_1$.

Nếu gọi x, y lần lượt là phần thực, phần ảo của z thì theo định nghĩa ta có :

$$x + x_2 = x_1$$
$$y + y_2 = y_1.$$

Vậy $x = x_1 - x_2$; $y = y_1 - y_2$ và $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Ta ký hiệu số phức hiệu là $z = z_1 - z_2$. Từ định nghĩa trên, dễ dàng suy ra rằng :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

3. Phép nhân. Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Ta gọi số phức

$$\boxed{z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \qquad (1)$$

là tích của số phức z_1 với số phức z_2. Khi đó ta viết $z = z_1 . z_2$.

Từ công thức (1) dễ dàng suy ra rằng phép nhân có các tính chất sau :

$$z_1 . z_2 = z_2 . z_1 \quad \text{(giao hoán)}$$
$$(z_1 . z_2)z_3 = z_1 . (z_2 . z_3) \quad \text{(kết hợp)}$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \quad \text{(phân bố đối với phép cộng)}$$
$$(-1) . z = -z$$
$$z . 0 = 0 . z = 0$$
$$i . i = -1.$$

4. Phép chia. Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Nếu $z_2 \neq 0$, thì tồn tại duy nhất một số phức $z = x + iy$ sao cho $z . z_2 = z_1$. Thật vậy, so sánh phần thực và phần ảo của hai vế đẳng thức này, ta được :

$$x_2 x - y_2 y = x_1,$$
$$y_2 x + x_2 y = y_1.$$

Đây là một hệ phương trình bậc nhất đối với hai ẩn x và y. Định thức của hệ là $\Delta = x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, vậy hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \quad y = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Số phức $$\boxed{z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}} \tag{2}$$

được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2 và ký hiệu là $\frac{z_1}{z_2}$. Dễ dàng thấy rằng muốn được (2), ta có thể nhân tử số và mẫu số của thương $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ với $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$.

5. Phép nâng lên lũy thừa và khai căn.

Ta gọi tích của n số phức z là lũy thừa bậc n của z và ký hiệu :

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \ldots z}_{n \text{ thừa số}}. \tag{3}$$

Đặt $w = z^n = (x + iy)^n$, thì do định nghĩa phép nhân, ta có thể tính được $\mathrm{Re}\,w$ và $\mathrm{Im}\,w$ theo x và y.

Nếu $z^n = w$, thì ngược lại, ta nói z là căn bậc n của w và ta viết

$$z = \sqrt[n]{w}$$

Sau này, ta sẽ còn xét kỹ hơn phép nâng lên lũy thừa và khai căn.

Ví dụ 1.
$$i^2 = -1 \tag{4}$$
$$i^3 = i^2 . i = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^3 . i = (-i)i = -i^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 . i = i, \ldots$$

Nhận xét. Do định nghĩa các phép toán về số phức vừa nêu trên, ta thấy rằng về mặt thực hành, các phép toán đại số đối với số phức vẫn được thực hiện tương tự như đối với số thực với chú ý rằng $i^2 = -1$.

Ví dụ 2. $\quad (3+5i)+(2-3i)=5+2i$

$$(-2+7i)-(3-i)=-5+8i$$

$$(3-5i)\cdot(-2+i)=(-6+5)+(10+3)i=-1+13i;$$

$$\frac{1}{i}=-i;$$

$$\frac{2+5i}{1-i}=\frac{(2+5i)(1+i)}{1-i^2}=\frac{-3+7i}{2}=\frac{-3}{2}+i\,\frac{7}{2}$$

Ví dụ 3. $\quad z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\mathrm{Re}z$

Vậy $\quad z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z \qquad (5)$

Ví dụ 4. Tìm các số thực x và y, nghiệm phương trình

$$(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i.$$

Sau khi tách phần thực và phần ảo ở vế trái, phương trình có thể viết được dưới dạng

$$(7x+2y+1)+i(5x-y-2)=5+6i$$

Từ đó suy ra:
$$\begin{cases}7x+2y+1=5\\5x-y-2=6.\end{cases}$$

Giải ra ta được

$$x=\frac{20}{17},\ y=-\frac{36}{17}.$$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}z+i\zeta=1\\2z+\zeta=1+i,\end{cases}$$

trong đó các ẩn số z và ζ là những số phức.
Giải bằng phương pháp định thức, ta có:

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & i\\1+i & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & i\\2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2-i}{1-2i}=\frac{(2-i)(1+2i)}{5}=\frac{4+3i}{5}.$$

$$\zeta=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 1+i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & i\\2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{i-1}{1-2i}=\frac{(i-1)(1+2i)}{5}=\frac{-3-i}{5}.$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu $P(z)$ là một đa thức của biến số phức z, với hệ số thực

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$$

$$a_k \text{ thực } (k=0,1,\dots,n)$$

thì $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$.