ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯƠNG THÚY NGA

TÍNH CHÍNH QUI CỦA NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE PHỨC TRONG MIỀN LỒI

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

***Người hướng dẫn khoa học:* PGS.TS. Phạm Hiến Bằng**

THÁI NGUYÊN - 2012

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán Dirichlet cho các toán tử Monge-Ampère phức thường được xét trên những miền trơn, giả lồi chặt trong $\mathbb{C}^n$. Đối với những toán tử này, sự tồn tại của các nghiệm liên tục yếu đã được Bedford và Taylor chứng minh năm 1976, sự tồn tại của các nghiệm trơn đã được chứng minh bởi L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg, và J. Spruck năm 1985; và N. V Krylov năm 1994. Tuy nhiên, ở đây không giả thiết gì về tính chính quy của biên.

Theo hướng nghiên cứu trên chúng tôi chọn đề tài: "*Tính chính quy của nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong miền lồi*". Cụ thể là đối với các C^2 - hàm đa điều hòa dưới trơn, xét phương trình Monge-Ampère phức $\det(u_{i\bar{j}}) = \psi$, ở đây $u_{i\bar{j}} = \partial^2 u / \partial z_i \partial \bar{z}_j, i, j = 1,\ldots,n$. (*)

Vấn đề đặt ra ở đây là chỉ ra sự tồn tại C^∞ - nghiệm đa điều hòa dưới u của phương trình (*) trong Ω với $\lim\limits_{z \to \partial\Omega} u(z) = 0$, trong đó Ω là một miền lồi, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, ψ là C^∞ - hàm trong Ω sao cho $\psi > 0$ và $\left|D\psi^{1/n}\right|$ bị chặn.

Trong trường hợp đa đĩa, chúng ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của C^∞ - nghiệm đa điều hòa dưới trong P của phương trình (*) sao cho $\lim\limits_{z \to z} u(z) = f(z)$ với $z \in \partial P$, trong đó R là một đa đĩa trong $\mathbb{C}^n$, ψ là C^∞ - hàm trong P sao cho $\psi > 0$ và $\left|D^2\psi^{1/n}\right|$ bị chặn và f là $C^{1,1}$ - hàm trên biên ∂P sao cho f là điều hòa dưới trên mỗi đĩa giải tích được nhúng trong ∂P.

Đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu tính chính quy của nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong miền lồi.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực trị, toán tử Monge-Ampère.

- Trình bày một số kết quả về tính chính quy của nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong miền lồi.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của giải tích hàm hiện đại, các phương pháp của lý thuyết thế vị phức.

- Kế thừa phương pháp và kết quả của Zbigniew Blocki.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 52 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về tính chính quy của nghiệm của phương trình Monge-Ampère trong miền lồi.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Sở Giáo dục và Đào tạo Lạng Sơn, Trường THPT Cao Lộc - Lạng Sơn cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2012

Tác giả

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

1.1.1. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω. *Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$*, hàm* $\lambda\mapsto u(a+\lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\{\lambda\in\mathbb{C}: a+\lambda b\in\Omega\}$. *Trong trường hợp này, ta viết* $u\in PSH(\Omega)$. *(ở đây* $PSH(\Omega)$ *là lớp hàm đa điều hoà dưới trong* Ω*).*

1.1.2. Định lý. *Cho* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông của* $\Omega\subset\mathbb{C}^n$. *Khi đó* $u\in PSH(\Omega)$ *khi và chỉ khi với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$ *sao cho*

$$\{a+\lambda b:\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|\le 1\}\subset\Omega,$$

ta có $$u(a)\le l(u;a,b),$$

trong đó $$l(u;a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+e^{it}b)dt.$$

Ngoài ra, tính đa điều hoà dưới là một tính chất địa phương.

Chứng minh. Phần thứ nhất suy ra trực tiếp từ định nghĩa của hàm đa điều hoà dưới vì $l(u;a,b)=L(v;0,1)$, trong đó $v(\lambda)=u(a+\lambda b)$.

Phần thứ hai là hiển nhiên, vì tính điều hoà dưới là tính chất địa phương.

Một số tính chất quan trọng của hàm đa điều hoà dưới có thể được suy ra từ kết quả tiếp theo. Tương tự như trường hợp của hàm điều hoà dưới, ta gọi nó là *Định lý xấp xỉ chính cho hàm đa điều hoà dưới.*

1.1.3. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u \in PSH(\Omega)$. *Nếu* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $\Omega_\varepsilon \neq \emptyset$, *thì* $u * \lambda_\varepsilon \in C^\infty \cap PSH(\Omega_\varepsilon)$. *Hơn nữa,* $u * \lambda_\varepsilon$ *đơn điệu giảm khi* ε *giảm, và* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u * \lambda_\varepsilon(z) = u(z)$ *với mỗi* $z \in \Omega$.

Phép chứng minh giống như chứng minh của Định lý xấp xỉ chính cho các hàm điều hoà dưới. Trước tiên ta cần Bổ đề sau:

1.1.4. Bổ đề. *Cho* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là một tập mở và* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Giả sử* $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^n$, *và* $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$. *Khi đó*

$$(l(u;.,b) * \chi_\varepsilon)(a) = l(u * \chi_\varepsilon; a, b). \qquad (1.1)$$

Chứng minh. Vế trái của (1.1) bằng

$$\int_{\mathbb{C}^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{it}b - w)dt \right) \chi_\varepsilon(w) d\lambda(w).$$

và do Định lý Fubini, nó bằng vế phải của (1.1).

Bây giờ chúng ta có thể chứng minh định lý.

Chứng minh. Do [9], Mệnh đề 2.5.2 (i), $u * \lambda_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Định lý 1.1.2 kết hợp với Bổ đề trên, suy ra $u * \lambda_\varepsilon \in PSH(\Omega_\varepsilon)$. Sử dụng lập luận đó như trong [9], Bổ đề 2.5.3, đối với mỗi biến riêng, ta có thể chứng minh (bằng quy nạp theo j) ước lượng sau :

$$u * \lambda_{\varepsilon_1} \geq \int_{C^{n-1}} I(w_1, ..., w_{j-1}, w_{j+1}, ..., w_n) d\lambda(w_1, ..., w_{j-1}, w_{j+1}, ..., w_n),$$

trong đó $I(w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n) =$

$$\int_C u(z_1+\varepsilon_2 w_1,\ldots,z_j+\varepsilon_2 w_j,z_{j+1}+\varepsilon_1 w_{j+1},\ldots,z_n+\varepsilon_1 w_n)\chi(w)d\lambda(w_j),$$

với $0\le\varepsilon_2<\varepsilon_1$ và $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\Omega_{\varepsilon_1}$. Từ đó ta có

$$(u*\lambda_{\varepsilon_1})(z)\ge(u*\lambda_{\varepsilon_2})(z)\ge u(z).$$

Phần còn lại của chứng minh cũng như trong [9], Định lý 2.5.5.

Bây giờ chúng ta sẽ nêu vài hệ quả của định lý xấp xỉ chính.

1.1.5. Hệ quả. *Cho Ω và Ω' là những tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $\mathbb{C}^k$, tương ứng. Nếu $u\in PSH(\Omega)$ và $f:\Omega'\to\Omega$ là một ánh xạ chỉnh hình, thì $u\circ f$ là đa điều hoà dưới trong Ω'.*

1.1.6. Hệ quả. *Nếu Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$, thì*

$$PH(\Omega)\subset PSH(\Omega)\subset SH(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega).$$

1.1.7. Hệ quả. *Cho Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$, và $u:\Omega\to\mathbb{R}$ là một hàm số. Khi đó $u\in PH(\Omega)$ khi và chỉ khi u và $-u$ là đa điều hoà dưới trong Ω.*

Vì hàm đa điều hoà dưới là điều hoà dưới nên ta có thể phát biểu vài tính chất khác:

1.1.8. Hệ quả. *Nếu $u,v\in PSH(\Omega)$ và $u=v$ hầu khắp nơi trong Ω, thì*

$$u\equiv v.$$

1.1.9. Hệ quả. *Hàm đa điều hoà dưới thoả mãn nguyên lý cực trị trong miền* *bị chặn, tức là nếu Ω là một tập con mở liên thông bị chặn của $\mathbb{C}^n$ và $u \in PSH(\Omega)$, thì hoặc u là hằng hoặc với mỗi z $\in \Omega$,*

$$u(z) < \sup_{w \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{y \to w \\ y \in \Omega}} u(y).$$

1.1.10. Định nghĩa. *Tập hợp $E \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm $a \in E$ đều có một lân cận V của a và một hàm $u \in PSH(V)$ sao cho $E \cap V \subset \{z \in V : u(z) = -\infty\}$.*

1.1.11. Hệ quả. *Các tập đa cực có độ đo (Lebesgue) không.*

Tính đa điều hoà dưới có thể được đặc trưng dưới dạng đạo hàm suy rộng.

1.1.12. Định lý. *Nếu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là mở và $u \in PSH(\Omega)$, thì với mỗi $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{C}^n$, $\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \beta_j \bar{\beta}_k \geq 0$ trong Ω, theo nghĩa của đạo hàm suy rộng, tức là*

$$\int_{\Omega} u(z) \langle L\varphi(z)\beta, \bar{\beta} \rangle \, d\lambda(z) \geq 0,$$

với hàm không âm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tùy ý. Ngược lại, nếu $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ sao cho với mọi $z \in \Omega$, mọi $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{C}^n$, $\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \beta_j \bar{\beta}_k \geq 0$ trong Ω (1.2), *theo nghĩa phân bố, thì hàm $u = \lim_{\varepsilon \to 0}(v * \chi_\varepsilon)$ được xác định tốt, đa điều hoà dưới trong Ω, và bằng v hầu khắp nơi trong Ω.*

Chứng minh. Cho $u \in PSH(\Omega)$ và $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon$ với $\varepsilon > 0$. Lấy một hàm không âm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ và một véc tơ $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{C}^n$. Định lý hội tụ trội

Lebesgue kết hợp với tích phân từng phần và Định lý xấp xỉ chính suy ra

$$\int_{\Omega} u(z)\langle L\varphi(z)\beta,\beta\rangle\, d\lambda(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(z)\langle L\varphi(z)\beta,\beta\rangle\, d\lambda(z)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\langle Lu_{\varepsilon}(z)\beta,\beta\rangle\varphi(z)\, d\lambda(z) \geq 0.$$

Phần đầu tiên của định lý được chứng minh.

Giả sử $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ và (1.2) được thoả mãn. Đặt $v_{\varepsilon} = v * \chi_{\varepsilon}$ với $\varepsilon > 0$. Khi đó $\Delta v \geq 0$ trong Ω, theo ý nghĩa suy rộng. Do [9], Định lý 2.5.8, tồn tại duy nhất hàm điều hoà dưới u trên Ω trùng với v hầu khắp nơi và $u = \lim_{\varepsilon\to 0} v_{\varepsilon}$. Định lý Fubini và (1.2) suy ra

$$\int_{\Omega}\left\langle Lv_{\varepsilon}(z)\beta,\beta\right\rangle\varphi(z)\, d\lambda(z) \geq 0,$$

với mọi $\beta \in \mathbb{C}^n$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$, $\varphi \geq 0$. Bởi vậy $\left\langle Lv_{\varepsilon}(z)\beta,\beta\right\rangle \geq 0$, với mọi $z \in \Omega_{\varepsilon}$, $\beta \in \mathbb{C}^n$, và do đó $v_{\varepsilon} \in \mathrm{PSH}(\Omega_{\varepsilon})$. Khi $v_{\varepsilon_1} < v_{\varepsilon_2}$ nếu $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, thì hàm giới hạn u là đa điều hoà dưới.

1.1.13. Hệ quả. *Cho Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Một hàm $u \in C^2(\Omega)$ là đa điều hoà trong Ω nếu và chỉ nếu $u \circ T$ là điều hoà trong $T^{-1}(\Omega)$ với mỗi đẳng cấu $\mathbb{C}$-tuyến tính $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.*

1.1.14. Định lý. *Cho Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó*

(i) Họ $\mathrm{PSH}(\Omega)$ là nón lồi, tức là nếu α, β là các số không âm và $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, thì $\alpha u + \beta v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

(ii) Nếu Ω là liên thông và $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ là dãy giảm, thì