ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH VIỆT PHƯƠNG

NGUYÊN LÍ DIRICHLET VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS PHAN HUY KHẢI

Thái Nguyên - 2009

Lời nói đầu

Nguyên lí Dirichlet là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

Luận văn này dành để trình bày các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán sơ cấp.

Ngoài phần mở đầu luận văn gồm bốn chương và danh mục tài liệu tham khảo. Chương **I** dành để trình bày các kiến thức cơ bản (đặc biệt giới thiệu nguyên lí Dirichlet) sẽ dùng đến trong các chương sau.

Chương **II** với tiêu đề "Ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán hình học tổ hợp" trình bày các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán trong lĩnh vực hình học tổ hợp.

Cần nhấn mạnh rằng sử dụng nguyên lí Dirichlet là một trong những phương pháp hiệu quả nhất để giải các bài toán về hình học tổ hợp.

Chương **III** trình bày cách sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán về số học, đặc biệt là các bài toán về tính chia hết, tính chính phương ...

Phần còn lại của luận văn dành để trình bày các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet vào các bài toán khác.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thày giáo PGS.TS Phan Huy Khải. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán trường Đại học Khoa học, khoa Sau đại học - ĐHTN, các thầy, cô giáo đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại đây. Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu và các đồng nghiệp của tôi ở trường THPT Phương Xá - Phú Thọ đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Mục lục

Chương 1

Các kiến thức cơ bản

Nguyên lí những cái lồng nhốt các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Nguyên lí này được phát biểu đầu tiên bởi nhà toán học người Đức Perter Guster Lijeune Dirichlet (1805-1859).

1.1 Nguyên lý Dirichlet cơ bản

Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

1.2 Nguyên lý Dirichlet mở rộng

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\dfrac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ, ở đây kí hiệu $[\alpha]$ để chỉ phần nguyên của số α.

Ta chứng minh nguyên lí Dirichlet mở rộng như sau : Giả sử trái lại mọi chuồng thỏ không có đến

$$\left[\frac{n+m-1}{m}\right] = \left[\frac{n-1}{m} + 1\right] = \left[\frac{n-1}{m}\right] + 1$$

con, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left[\dfrac{n-1}{m}\right]$ con. Từ đó suy ra tổng số con thỏ không vượt quá $m.\left[\dfrac{n-1}{m}\right] \geq n-1$ con. Điều này vô lí vì có n con thỏ. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

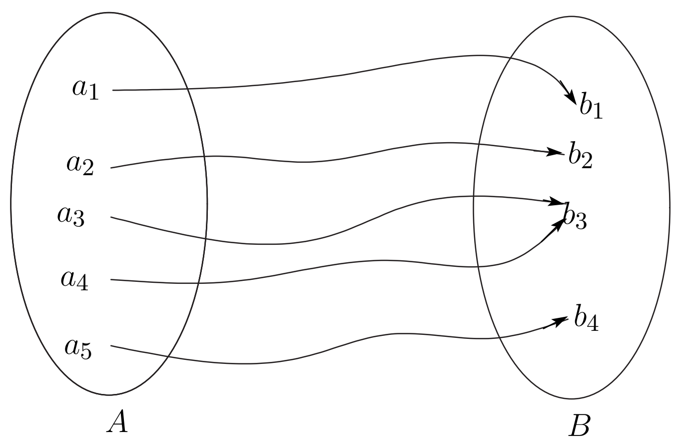
Nguyên lí Dirichlet mở rộng được chứng minh.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

Nguyên lí Dirichlet thực chất là một định lí về tập hữu hạn. Người ta có thể phát biểu chính xác nguyên lí này dưới dạng sau đây.

1.3 Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B.



Hình 1.1

Với cùng một cách diễn đạt như vậy, nguyên lí Dirichlet mở rộng có dạng sau đây.

1.4 Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp mở rộng

Giả sử A, B là hai tập hợp hữu hạn và $S(A), S(B)$ tương ứng kí hiệu là các số lượng phần tử của A và B. Giả sử có một số tự nhiên k nào đó mà $S(A) > k.S(B)$ và ta có quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử của B. Khi đó tồn tại ít nhất $k+1$ phần tử của A mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B.

Chú ý: Khi $k = 1$, ta có ngay lại nguyên lí Dirichlet.

Chương 2

Ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán hình học tổ hợp

Chương này trình bày phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp. Vì lẽ đó, chúng tôi xin trình bày một số mệnh đề (thực chất là một số nguyên lí Dirichlet áp dụng cho độ dài các đoạn thẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các vật thể) hay sử dụng nhiều đến trong nhiều bài toán hình học tổ hợp được đề cập đến trong chương này.

Mệnh đề 2.1 Nguyên lí Dirichlet cho diện tích

Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, \ldots, K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i = \overline{1, n}$ và

$$|K| < |K_1| + |K_2| + \cdots + |K_n| .$$

Ở đây $|K|$ là diện tích của hình phẳng K, còn $|K_i|$ là diện tích của hình phẳng $K_i, i = \overline{1, n}$, thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng $H_i, H_j, (1 \leq i \leq j \leq n)$ sao cho H_i và H_j có điểm trong chung. (Ở đây ta nói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng, nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trọn trong A).

Tương tự nguyên lí Dirichlet cho diện tích, ta có nguyên lí Dirichlet cho độ dài các đoạn thẳng, thể tích các vật thể.

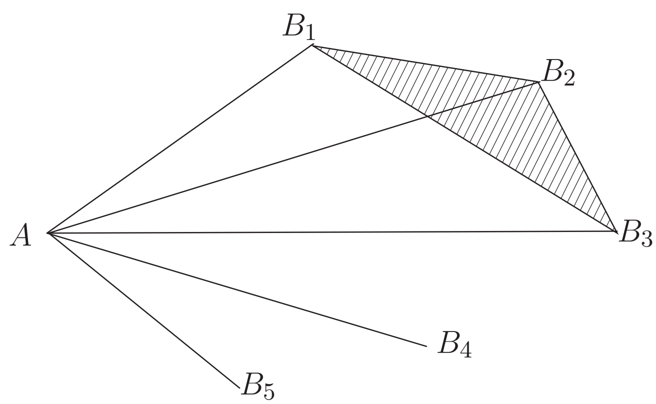
Nguyên lí Dirichlet còn được phát biểu cho trường hợp vô hạn như sau.

Mệnh đề 2.2 (Nguyên lí Dirichlet vô hạn) Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn các ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn quả táo.

Ta bắt đầu sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp sau đây.

Ví dụ 2.1 Trong mặt phẳng cho sáu điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được bôi màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là ba đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được bôi cùng một màu.

Lời giải:



Hình 2.1

Xét A là một trong số sáu điểm đã cho. Khi đó xét năm đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng nối điểm A với năm điểm còn lại). Vì mỗi đoạn thẳng được bôi chỉ màu đỏ hoặc xanh, nên theo nguyên lí Dirichlet có it nhất ba trong năm đoạn nói trên cùng màu. Giả sử là các đoạn AB_1, AB_2, AB_3 và có thể cho rằng chúng cùng màu xanh.

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

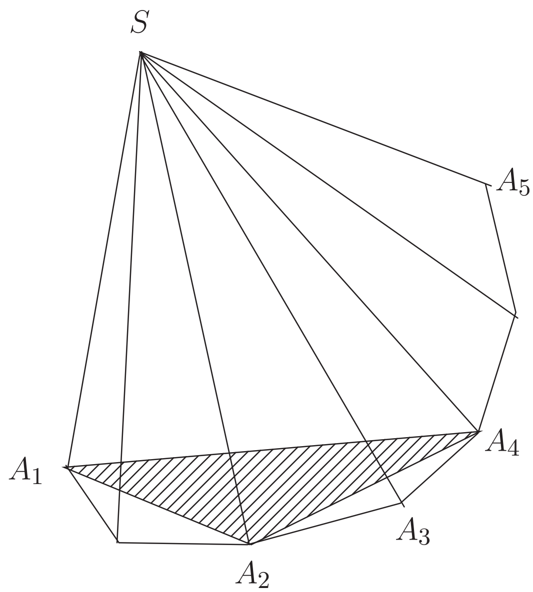
1. Nếu ít nhất một trong ba đoạn B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 màu xanh thì tồn tại một tam giác với ba cạnh xanh và kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.

2. Nếu không phải như vậy, tức là B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 màu đỏ, thì ba điểm phải tìm là B_1, B_2, B_3, vì $B_1B_2B_3$ là tam giác với ba cạnh đỏ.$\square$

Ví dụ 2.2 Cho hình chóp đáy là đa giác chín cạnh. Tất cả các cạnh bên và 27 đường chéo của đa giác đáy được bôi bằng một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh của hình chóp sao cho chúng là những đỉnh của hình tam giác với các cạnh được bôi cùng màu.

Lời giải:

Xét chín cạnh bên. Vì chín cạnh này chỉ được bôi bằng hai màu đỏ hoặc xanh, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại năm cạnh bên được bôi cùng màu. Không giảm tổng quát có thể cho đó là các cạnh bên $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, SA_5$ được bôi cùng màu đỏ, các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 xếp theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Xét đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5$. Có hai khả năng sau xảy ra:



Hình 2.2

1. Nếu A_1A_2 là đường chéo của đáy, khi đó dĩ nhiên A_2A_4, A_4A_1 cũng là các đường chéo của đáy.
   Lại có hai khả năng sau xảy ra:

   (a) Nếu cả ba đoạn A_1A_2, A_2A_4, A_4A_1 cùng bôi màu xanh. Khi đó A_1, A_2, A_4 là ba đỉnh cần tìm, vì tam giác $A_1A_2A_4$ là tam giác với ba cạnh xanh.

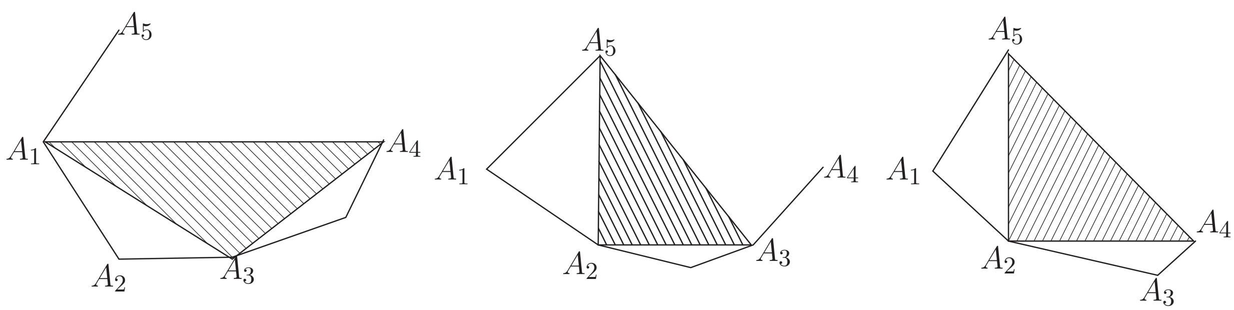
   (b) Nếu một trong các đoạn A_1A_2, A_2A_4, A_4A_1 là đỏ. Giả sử A_2A_4 đỏ, thì SA_2A_4 là tam giác với ba cạnh đỏ. Lúc này S, A_2, A_4 là ba đỉnh cần tìm. Trường hợp 1 đã giải quyết xong.

2. Nếu A_1A_2 là cạnh đáy. Khi đó dĩ nhiên A_1A_3, A_3A_5 chắc chắn là đường chéo đáy.

(a) Nếu A_1A_5 là đường chéo đáy thì ta quay về trường hợp 1 vừa xét, với $A_1A_3A_5$ là tam giác với ba cạnh là ba đường chéo đáy.

(b) Nếu A_1A_5 là cạnh đáy. Khi đó rõ ràng A_1A_3, A_1A_4 là các đường chéo đáy.

NếuA_3A_4 là đường chéo đáy, ta quay về trường hợp 1, nếu A_3A_4 là cạnh bên. Lại xét hai khả năng sau:



Hình 2.3

1. Nếu A_2A_3 là đường chéo đáy, thì tam giác $A_2A_3A_5$ là tam giác với ba cạnh là ba đường chéo đáy, ta quay về trường hợp 1.

2. Nếu A_2A_3 là cạnh đáy. Khi đó xét tam giác $A_2A_4A_5$ và quay về trường hợp 1.

Tóm lại bài toán đã được giải quyết xong hoàn toàn.□

Ví dụ 2.3 Trong hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1) có 101 điểm. Chứng minh rằng có năm điểm trong các điểm đã chọn được phủ bởi một đường tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Lời giải:
Chia hình vuông ra làm 25 hình vuông bằng nhau, mỗi cạnh của hình vuông là 0.2.Vì có 101 điểm, mà chỉ có 25 hình vuông, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hình vuông nhỏ chứa ít nhất năm điểm (trong 101 điểm đã cho). Vì hình vuông này nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \frac{\frac{1}{5}.\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Do $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$ nên dĩ nhiên đường tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp trên và có bán kính $\frac{1}{7}$ chứa ít nhất năm điểm nói trên. □