ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

------------- 0 -------------

Nguyễn Xuân Huy

BÀI TOÁN TỐI □U
VỚI HÀM THUẦN NHẤT D□ƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
------------- 0 -------------

Nguyễn Xuân Huy

BÀI TOÁN TỐI □U VỚI HÀM THUẦN NHẤT D□ƠNG

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NG- ỜI H- ỚNG DẪN KHOA HỌC
GS-TS Trần Vũ Thiệu

THÁI NGUYÊN - 2009

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Hàm thực thuần nhất dương (còn gọi đơn giản là hàm thuần nhất) rất quen thuộc và hay gặp trong nhiều ứng dụng, đặc biệt trong nghiên cứu kinh tế vi mô. Hàm tuyến tính, hàm bậc hai, hàm Cobb-Douglas, các hàm đa thức thuần nhất ... là các ví dụ về hàm thuần nhất dương. Hàm thuần nhất biểu lộ hành vi rất đều đặn, khi mọi biến tăng theo cùng một tỉ lệ. Chẳng hạn, với hàm thuần nhất bậc 0, khi các biến thay đổi theo cùng một tỉ lệ thì giá trị của hàm không hề thay đổi; với hàm thuần nhất bậc 1, khi tăng gấp đôi (gấp ba) mọi biến thì giá trị của hàm cũng tăng gấp đôi (gấp ba). Một đặc trưng quan trọng của hàm thuần nhất là các đạo hàm riêng của một hàm thuần nhất cũng là một hàm thuần nhất và các hàm thuần nhất có thể biểu diễn được qua các đạo hàm riêng của nó (Định lý Euler).

Đề tài luận văn đề cập tới lớp bài toán tối ưu với các hàm thuần nhất dương, nghĩa là hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc của bài toán đều là các hàm thuần nhất (bậc có thể khác nhau). Qui hoạch tuyến tính và qui hoạch bậc hai là những trường hợp riêng của lớp bài toán này. Việc tìm hiểu bài toán tối ưu với các hàm thuần nhất dương là hoàn toàn cần thiết và hữu ích, giúp ta hiểu sâu hơn về các bài toán, phương pháp tối ưu phi tuyến và mở rộng phạm vi ứng dụng của chúng.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày một số kết quả cơ bản liên quan tới bài toán tối ưu với các hàm thuần nhất dương. Các vấn đề đề cập trong luận văn được trình bày một cách chặt chẽ về mặt toán học, một số khái niệm và sự kiện nêu trong luận văn có kèm theo ví dụ và hình vẽ để minh hoạ.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương:

Chương 1 "**Những kiến thức về giải tích lồi**" giới thiệu vắn tắt một số kiến thức cơ bản, cần thiết về giải tích lồi như các khái niệm về tập affine và bao affine, tập lồi và bao lồi, nón lồi và tập lồi đa diện, cùng với các khái niệm đỉnh, cạnh, diện của tập lồi đa diện và các khái niệm về hàm lồi, hàm lồi chặt cùng một số tính chất cơ bản của chúng. Nội dung trình bày trong chương này sẽ cần đến ở chương sau, khi nghiên cứu các bài toán tối ưu phi tuyến nói chung và bài toán tối ưu với hàm thuần nhất dương nói riêng.

Chương 2 "**Các bài toán tối ưu**" trình bày vắn tắt các khái niệm và kết quả về bài toán tối ưu phi tuyến, phân biệt tối ưu địa phương và tối ưu toàn cục, tối ưu không ràng buộc và tối ưu có ràng buộc, các điều kiện cần và điều kiện đủ của tối ưu, đặc biệt là điều kiện KKT cho tối ưu có ràng buộc.

Các khái niệm nón tiếp xúc, khái niệm chính quy, hàm Lagrange và nhân tử Lagrange cũng được giới thiệu. Nhiều ví dụ đã được đưa ra để minh hoạ cho các khái niệm và kết quả trình bày.

Chương 3 "**Bài toán tối ưu với hàm thuần nhất dương**" đề cập tới lớp bài toán tối ưu phi tuyến với các hàm thuần nhất dương. Bài toán được xét có thể diễn đạt như một bài toán "min-max" đơn giản, với "max" là bài toán tuyến tính thông thường có một ràng buộc duy nhất. Từ đó nêu cách diễn đạt mới cho qui hoạch tuyến tính và qui hoạch toàn phương ràng buộc tuyến tính. Với những giả thiết nhất định, có thể chỉ ra bài toán tối ưu không lồi bậc hai tương đương với bài toán tối ưu lồi.

Do thời gian có hạn nên luận văn này mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi có những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS-TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô ở Viện Công nghệ thông tin, Viện Toán học Hà Nội, Khoa Công nghệ thông tin, Khoa Toán và Phòng Đào tạo sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập tại trường.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Ninh, Ban Giám hiệu và các thầy cô giáo Trường THPT Hoàng Quốc Việt, nơi tác giả công tác đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tác giả hoàn thành nhiệm vụ học tập.

Tác giả cũng xin bày tỏ sự quý mến và lòng biết ơn sâu sắc tới Bố mẹ, gia đình và người thân đã luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Hà Nội, tháng 9/2009

Tác giả

Chương 1

Những kiến thức về giải tích lồi

Chương này nhắc lại vắn tắt một số kiến thức cơ bản, cần thiết về giải tích lồi (tập lồi, hàm lồi và các tính chất) phục vụ cho tìm hiểu và nghiên cứu các bài toán tối ưu. Nội dung trình bày ở chương này chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [2].

1.1 Tập affin và tập lồi

1.1.1. Tập affine

Cho x^1, x^2 là hai điểm trong $\mathbb{R}^n$. *Đường thẳng* qua x^1, x^2 là tập các điểm

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = x^2 + \lambda(x^1 - x^2)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập affine* nếu M chứa chọn cả đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ thuộc M, tức là $\forall x^1, x^2 \in M$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$. Nói cách khác, M là tập affine nếu nó chứa tổ hợp tuyến tính của hai điểm bất kỳ thuộc M với tổng các hệ số bằng 1. Ta gọi một điểm $x \in \mathbb{R}$ có dạng

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

với $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ và

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

là *tổ hợp affine* của các điểm $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}^n$. Nếu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập affine và $x^0 \in M$ thì tập $L = M - x^0 = \big\{x - x^0 \mid x \in M\big\}$ là một không gian con, tức là nếu $a, b \in L$ thì mọi điểm $c = \lambda a + \mu b$ với $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ cũng thuộc L (L đóng với phép cộng và phép nhân vô hướng). Vì vậy, một tập affine có thể biểu diễn bởi

$$M = x^0 + L = \big\{x^0 + v \mid v \in L\big\},$$

trong đó $x^0 \in M$ và L là không gian con. Không gian con L tương ứng với tập affine M không phụ thuộc vào cách chọn x^0, tức x^0 là điểm bất kỳ thuộc M. Hơn nữa, không gian con L này xác định duy nhất. Ta gọi L là *không gian con song song* với M. Thứ nguyên (dimension) hay còn gọi là *số chiều* của tập affine M là thứ nguyên của không gian con song song với nó.

Bao affine (affine hull) của một tập $E \subseteq \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập affine chứa E. Đó là tập affine nhỏ nhất chứa E, kí hiệu là $\operatorname{aff} E$.

Ví dụ 1.1. Tập nghiệm M của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$, là một tập affine. Thật vậy, với $x^1, x^2 \in M$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, ta có

$$A\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) = \lambda A x^1 + (1-\lambda)Ax^2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$
$$\Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$$

Ví dụ 1.2. Bao affine của tập $E = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, x_3 = 0\big\}$ là mặt phẳng chứa hình vuông E, cụ thể $\operatorname{aff} E = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\big\}$.

1.1.2. Số chiều và điểm trong tương đối

Số chiều (hay thứ nguyên) của một tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ là số chiều của bao affine của nó, ký hiệu là $\dim M$. Cho tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ có $\dim M < n$. Một điểm $a \in M$ được gọi là *điểm trong tương đối* (relative interior point) của M nếu tồn tại hình cầu mở $B(a, \epsilon)$ sao cho: $\big(B(a,\epsilon) \cap \operatorname{aff} M\big) \subset M$.

Phần trong tương đối của tập M, ký hiệu là $\operatorname{ri} M$, là tập chứa tất cả các điểm trong tương đối của M. Một tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là có *thứ nguyên đầy đủ* nếu $\dim M = n$. Dễ thấy rằng tập M có phần trong khác rỗng ($\operatorname{int} M \neq \emptyset$) khi và chỉ khi nó có thứ nguyên đầy đủ.

Ví dụ 1.3. Cho $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$, ta có: $\operatorname{int} E = \emptyset$, $\operatorname{ri} E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, x_3 = 0\}$, và $\dim E = 2$.

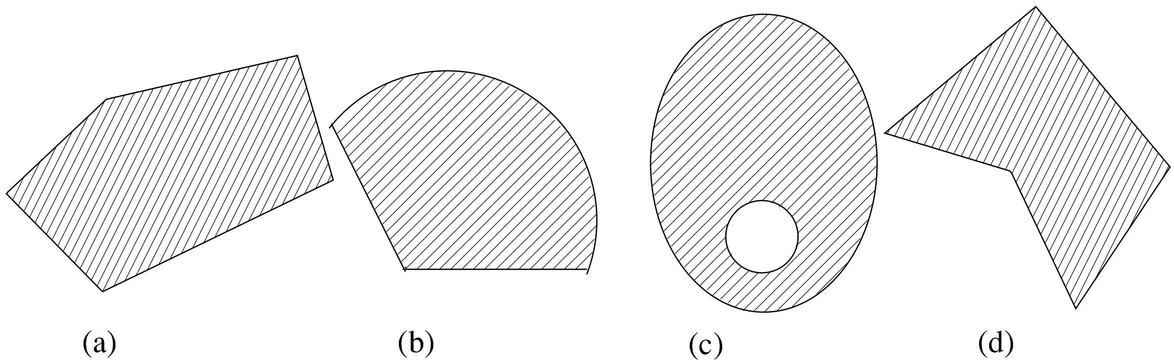
1.1.3. Tập lồi và điểm cực biên

Cho hai điểm $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm có dạng

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = x^2 + \lambda(x^1 - x^2), 0 \leq \lambda \leq 1,$$

được gọi là *đoạn thẳng* nối x^1, x^2, kí hiệu là $[x^1, x^2]$.

Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi (convex set) nếu nó chứa chọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó, tức là $\forall x^1, x^2 \in M$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ta có $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$.



Hình 1.1. (a), (b) - Tập lồi; (c), (d) - Tập không lồi

Từ định nghĩa dễ thấy rằng giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi. Tuy nhiên hợp của các tập lồi chưa chắc là tập lồi.

Ta gọi điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

với $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \geq 0$ và

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

là *tổ hợp lồi* của các điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\lambda_i \geq 0$ với $\forall i = 1, 2, \cdots, k$ thì ta nói x là *tổ hợp lồi chặt* của $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$.

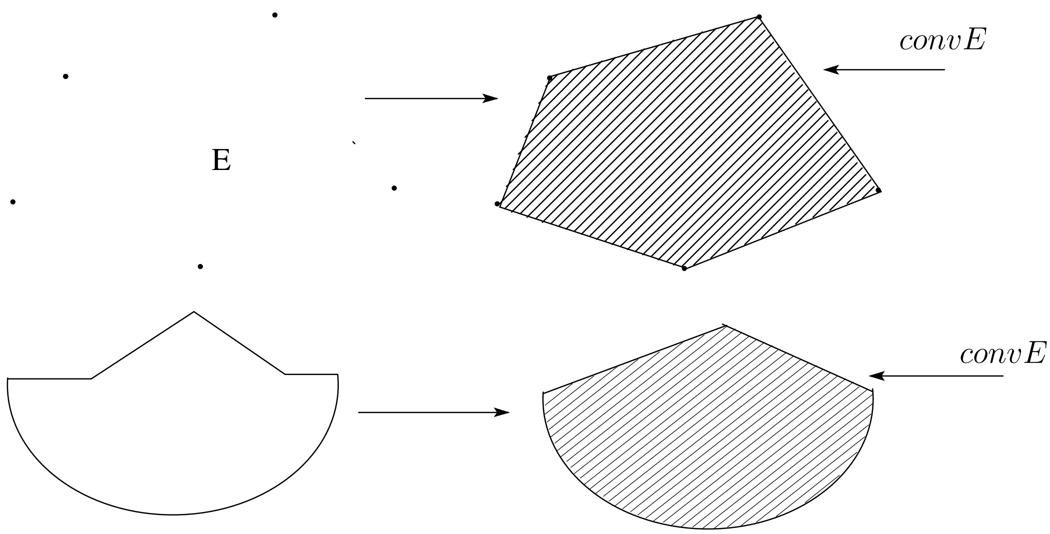
Mệnh đề 1.1. *Một tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của những phần tử thuộc nó.*

Mệnh đề 1.2.

a) Nếu $M \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi và số thực $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha M = \{y \mid y = \alpha x,\ x \in M\}$ cũng là tập lồi.

b) Nếu $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ là hai tập lồi thì
$M_1 + M_2 = \left\{x \mid x = x^1 + x^2,\ x^1 \in M_1,\ x^2 \in M_2\right\}$ cũng là tập lồi.

Bao lồi (convex hull) của tập $E \subset \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập lồi chứa E và được kí hiệu là $\operatorname{conv} E$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E.



Hình 1.2. Ví dụ về bao lồi

Mệnh đề 1.3. *Bao lồi của tập $E \subset \mathbb{R}^n$ chứa tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử thuộc E.*

Cho tập lồi $M \subset \mathbb{R}^n$. Một điểm $x \in M$ được gọi là *điểm cực biên* (extreme point) của M nếu x không thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt bất kỳ nào của M, tức là

$$\nexists y, z \in M, y \neq z \text{ sao cho } x = \lambda y + (1 - \lambda) z,\ 0 < \lambda < 1.$$

Theo định nghĩa, một điểm cực biên không thể là điểm trong của tập lồi. Vì vậy tất cả các điểm cực biên đều là các điểm biên. Nếu tập hợp không chứa biên thì nó không có điểm cực biên.

Mệnh đề 1.4. *Một tập lồi đóng khác rỗng $M \subset \mathbb{R}^n$ có điểm cực biên khi và chỉ khi nó không chứa chọn một đường thẳng nào.*