**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**
-------------------

**ĐẶNG VĂN HIẾU**

# SỬ DỤNG MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
**MÃ SỐ: 60 46 40**

# LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

***Người hướng dẫn khoa học*: PGS.TS. PHAN HUY KHẢI**

***Thái Nguyên, năm 2009***

# MỤC LỤC

# LỜI CẢM ƠN

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS Phan Huy Khải, người thầy đã trực tiếp giảng dạy, hướng dẫn và tạo mọi điều kiện giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo sau Đại học Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và các thầy giáo, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến cha mẹ, người thân, bạn bè và tất cả những người đã giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

# LỜI NÓI ĐẦU

Bất đẳng thức là một trong những chuyên mục có tính hấp dẫn nhất trong giáo trình giảng dạy và học tập bộ môn toán ở nhà trường phổ thông. Nó là một đề tài thường xuyên có mặt trong các đề thi về toán trong các kỳ thi tuyển sinh quốc gia, cũng như trong các kỳ thi Olympic về toán ở mọi cấp.

Luận văn này dành để trình bày một nhánh của lý thuyết bất đẳng thức – Các bất đẳng thức thông dụng.

Ngoài phần mở đầu và danh mục tài liệu tham khảo luận văn gồm có 5 chương:

Chương 1 với tiêu đề "Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi" dành để trình bày về bất đẳng thức Côsi.

Bất đẳng thức Côsi là bất đẳng thức quan trọng nhất và có nhiều ứng dụng nhất trong chứng minh bất đẳng thức. Trong chương này chúng tôi dành để trình bày các phương pháp cơ bản nhất để sử dụng có hiệu quả bất đẳng thức Côsi.

Chương 2 "Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski" trình bày các ứng dụng của bất đẳng thức Bunhiacopski và bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng.

Một trong những phương pháp hay sử dụng và có tính hiệu quả để chứng minh các bất đẳng thức là sử dụng bất đẳng thức với các dãy đơn điệu. Các kết quả này được trình bày trong chương 3.

Chương 4 dành để trình bày một lớp bất đẳng thức đơn điệu đặc biệt (đó là bất đẳng thức Trêbưsép).

Sau hết trong chương 5 trình bày một áp dụng lý thú các kết quả của giải tích lồi để chứng  minh bất đẳng thức – đó là sử dụng tính lồi của hàm số để chứng minh bất đẳng thức.

# Chương 1

## PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

### 1.1 BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI.

**1.1.1 Định lý.** Với $n$ số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$ ( $n \geq 2$ ) ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} .$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh

- Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $n = 2$.
- Giả sử bất đẳng thức đã đúng cho $n$ số không âm thì bất đẳng thức cũng đúng với $2n$ số không âm.

Ta có: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n} \geq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}.a_{n+2}...a_{2n}}\right) \geq \sqrt[2n]{a_1.a_2...a_{2n}}$ , nên bất đẳng thức đúng khi $n$ bằng một luỹ thừa của 2.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n$ số không âm, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n-1$ số không âm. Thật vậy, đặt $A = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ ; $a_n = \dfrac{A}{n-1}$.

Ta có: $A + \dfrac{A}{n-1} \geq n.\sqrt[n]{\dfrac{a_1.a_2...a_{n-1}.A}{n-1}} \Rightarrow A \geq (n-1).\sqrt[n-1]{a_1.a_2...a_{n-1}}$.

Kết hợp ba điều trên suy ra bất đẳng thức Côsi đúng với mọi $n$ nguyên dương $(n \geq 2) \Rightarrow$ đpcm.

**1.1.2 Hệ quả.** Với $n$ số dương: $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ ta luôn có:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} > 0$, (1)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq n.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} > 0. \quad (2)$$

Nhân từng vế của (1),(2) suy ra điều phải chứng minh.

**Nhận xét**: • Bất đẳng thức Côsi chỉ áp dụng được cho các số không âm.

• Bất đẳng thức Côsi là bất đẳng thức quan trọng nhất, quen thuộc nhất, và có một tầm ứng dụng rộng rãi trong các bộ môn của toán học sơ cấp. Đặc biệt là dùng để chứng minh bất đẳng thức. Sự thành công của việc áp dụng bất đẳng thức Côsi để chứng minh các bài toán về bất đẳng thức hoàn toàn phụ thuộc vào sự linh hoạt của từng người sử dụng và kỹ thuật cách chọn các số $a_1, a_2, ...., a_n$.

Sau đây là một số phương pháp vận dụng bất đẳng thức Côsi để chứng minh bất đẳng thức.

1.2 SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI CƠ BẢN.

**1.2.1 Nội dung phương pháp.**

**Qui ước**: Gọi hệ quả của bất đẳng thức Côsi là "Bất đẳng thức Côsi cơ bản". Sử dụng hệ quả để chứng minh bất đẳng thức gọi là phương pháp "Sử dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản".

Từ "Bất đẳng thức côsi cơ bản" tổng quát, ta có hai trường hợp riêng sau:

• Với mọi $a, b > 0$, ta có: $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$ hay: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

• Với mọi $a, b, c > 0$, ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ hay: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

**1.2.2 Một số thí dụ minh hoạ.**

<u>Thí dụ 1.1</u> (Đề thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng khối A – 2005).

Cho $x, y, z > 0$ và thoả mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản hai lần liên tiếp, ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\right).\quad(1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y+z\\ y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\dfrac{1}{x+2y+z}\le\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2z}\right)$ (2)

và $\dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{z}\right)$. (3)

Cộng từng vế (1),(2),(3) ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{3}{4}$.

**Nhận xét**: Ta cũng có bất đẳng thức Côsi cơ bản sau:

Với $a,b,c,d>0$ thì:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 16\Rightarrow\frac{1}{a+b+c+d}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Áp dụng vào thí dụ trên, ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\quad\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Tương tự suy ra: $\dfrac{1}{x+2y+z}\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ và $\dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}\right)$.

$$\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1\ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{3}{4}$.

<u>Thí dụ 1.2</u> (Bất đẳng thức Nesbit 3 biến).

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$. (1)

Bài giải

Dễ thấy (1) $\Leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\ge 9. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản thì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

**Nhận xét** :

- Bất đẳng thức Nesbit cũng là một trong các bất đẳng thức thông dụng, thường dùng làm bất đẳng thức trung gian để chứng minh một bất đẳng thức khác, nhằm rút gọn phép chứng minh một bất đẳng thức.
- Xin đưa ra một thí dụ hình học lý thú minh hoạ cho bất đẳng thức Nesbit sau:

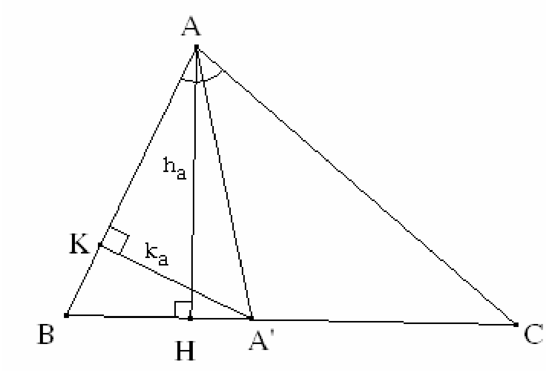
Cho $\Delta ABC$. Vẽ ba phân giác AA',BB',CC'. Gọi $k_a,k_b,k_c$ tương ứng là khoảng cách từ $A',B',C'$ đến $AB,BC,CA$. Gọi $h_a,h_b,h_c$ tương ứng là ba chiều cao hạ từ $A,B,C$. Chứng minh: $\frac{k_a}{h_a}+\frac{k_b}{h_b}+\frac{k_c}{h_c}\ge\frac{3}{2}$.

Bài giải

Ta có: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABA'}+S_{\Delta AA'C}$ (Hình 1.1)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ck_a+\frac{1}{2}bk_a$$

$$\Rightarrow ah_a=k_a(b+c)\Rightarrow\frac{k_a}{h_a}=\frac{a}{b+c}.$$



(Hình 1.1)

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\frac{k_b}{h_b}=\frac{b}{c+a}$ ; $\frac{k_c}{h_c}=\frac{c}{a+b}$.

Từ đó suy ra: $\frac{k_a}{h_a}+\frac{k_b}{h_b}+\frac{k_c}{h_c}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$. (*)

Theo thí dụ 1.2 $\Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

<u>Thí dụ 1.3</u> Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Chứng minh: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\le\frac{3}{4}$.

Bài giải

Có: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{x+1}+1-\frac{1}{y+1}+1-\frac{1}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$.

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản ta có:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{9}{x+1+y+1+z+1}=\frac{9}{4}, \qquad \text{(do: } x+y+z=1\text{)}.$$

Vậy: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=y+1=z+1\\x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$ .

**Nhận xét**:

- Xin đưa ra một minh hoạ lượng giác cho thí dụ trên:

Chứng minh rằng trong mọi $\Delta ABC$, ta luôn có:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}\le\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có (1) tương đương với:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+1}+\frac{\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+1}+\frac{\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}+1}\le\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Đặt $a=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$ ; $b=\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$ ; $c=\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$, $(a,b,c>0)$.

Dễ thấy: $a+b+c=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1.$ (3)

Khi đó (2) trở thành: $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\le\frac{3}{4}.$ (4)

Theo thí dụ 1.3 thì từ (3),(4) $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- Theo cách giải trên, ta cũng chứng minh được dạng tổng quát của thí dụ 1.3 sau:

  Cho $x_1,x_2,...,x_n>0$ thoả mãn: $x_1+x_2+...+x_n=1$.

  Chứng minh: $\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}+...+\frac{x_n}{x_n+1}\le\frac{n}{n+1}$.

Thí dụ 1.4 Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng:

$$M=\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\le\frac{3}{4}.$$

Bài giải

Có $M=1-\frac{x+y+z}{2x+y+z}+1-\frac{x+y+z}{x+2y+z}+1-\frac{x+y+z}{x+y+2z}$

$$=3-(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)=$$

$$=3-\frac{1}{4}\left[(2x+y+z)+(x+2y+z)+(x+y+2z)\right]\left[\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right].$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\left[(2x+y+z)+(x+2y+z)+(x+y+2z)\right]\left[\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right]\ge 9.$$

Vậy $M\le 3-\frac{1}{4}.9=\frac{3}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Thí dụ 1.5 Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}<\frac{3}{16}.$$