BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THẢO

HỆ ĐẾM VÀ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN PHỔ THÔNG

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2009

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu..2-3

Chương 1 Hệ đếm ……..4

§1 Khái niệm hệ đếm với cơ số bất kỳ ……..4

§2 Qui tắc đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ cơ số khác..... 9

§3 Đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác........11

§4 Sử dụng máy tính đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k_1 này sang hệ đếm cơ số k_2 ……………...……........................22

§5 Tính toán số học trong hệ đếm cơ số bất kỳ...30

§6 Thực hiện tính toán số học trên máy tính..38

§7 Sử dụng phép chia để đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2 ………………......................................……..........................43

§8. Sơ lược về ứng dụng của hệ đếm trong máy tính điện tử 46

Chương 2 Ứng dụng của hệ đếm trong toán phổ thông…..............52

§1 Tính chất chia hết 52

§2 Sử dụng hệ đếm trong giải toán 65

Kết luận...94

Tài liệu tham khảo...95

LỜI NÓI ĐẦU

Có thể nói hệ đếm là lí thuyết toán học đầu tiên xuất hiện do nhu cầu thực tiễn của cuộc sống, được hình thành và phát triển song hành với sự phát triển của văn minh nhân loại. Trong cuộc sống ta luôn phải sử dụng hệ đếm (cơ số 10) để tính toán. Hệ đếm cơ số 2, cùng với các hệ đếm cơ số 10, cơ số 8,... là cơ sở làm việc của máy tính điện tử. Lí thuyết hệ đếm (cơ số bất kì) còn liên quan đến nhiều lĩnh vực khác của toán học: lí thuyết chia hết, toán rời rạc, phương trình nghiệm nguyên và phương trình hàm, qui nạp toán học, các bài toán trò chơi,...

Mặc dù hệ đếm đóng vai trò rất quan trọng trong cuộc sống hàng ngày cũng như trong học tập, những kiến thức về hệ đếm còn ít được quan tâm giảng dạy trong trường phổ thông. Vì vậy phần lớn học sinh có thể sử dụng thành thạo những ứng dụng của hệ đếm (máy tính điện tử, máy ảnh số, máy nghe nhạc,...) nhưng không có các kiến thức sơ đẳng về hệ đếm. Thí dụ, phần lớn học sinh biết sử dụng máy tính điện tử khoa học để làm các phép toán, không chỉ các phép toán số học, mà còn các phép toán cao cấp (lấy modulo, tính theo công thức truy hồi...), nhưng không hiểu cơ chế thực hiện các tính toán trên máy.

Luận văn *Hệ đếm và ứng dụng trong toán phổ thông* có mục đích trình bày các kiến thức cơ bản của hệ đếm và một số ứng dụng của hệ đếm trong giải toán phổ thông (các tiêu chuẩn chia hết trong hệ đếm bất kì, phương pháp hệ đếm giải một lớp các bài toán thi vô địch quốc gia và quốc tế).

Luận văn gồm hai chương.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản của hệ đếm và tính toán trên máy: Khái niệm hệ đếm, đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác, tính toán số học trong hệ đếm cơ số bất kì; Sử dụng máy tính khoa học (*Caculator, Vianacal Vn-570MS, Casio fx570MS, Casio fx-570ES,...)*

và phần mềm tính toán *Maple* để đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác và tính toán số học trên hệ đếm cơ số bất kì. Cuối chương trình bày sơ lược nguyên lí trao đổi thông tin trên máy tính điện tử.

Chương 2 trình bày hai ứng dụng của hệ đếm trong toán phổ thông. Một số tính chất chia hết trong hệ đếm cơ số 10 được mở rộng sang cho hệ đếm cơ số bất kì trong **§**1 của Chương. Điều này cho phép nhìn lại các qui tắc và tiêu chuẩn chia hết trong hệ đếm cơ số 10 và ứng dụng để giải một số bài toán chia hết. Ứng dụng của hệ đếm trong giải toán được minh họa bởi nhiều bài toán thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế trong **§**2 của Chương, qua đây ta cũng thấy rõ mối quan hệ giữa hệ đếm với các vấn đề khác của toán phổ thông (phương trình hàm, phương trình nghiệm nguyên, dãy truy hồi,...). Những bài thi vô địch đã có trong [7] và [8] không được trình bày ở đây. Vì vậy, kết hợp **§** này với [7] và [8], số lượng bài toán là đủ nhiều để có thể coi Hệ đếm như một *phương pháp* giải các bài toán gặp trong phương trình hàm, phương trình nghiệm nguyên,...

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS TS Tạ Duy Phượng. Xin được tỏ lòng cám ơn chân thành nhất tới Thầy.

Tác giả xin cám ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, nơi tác giả đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản.

Và cuối cùng, xin cám ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học Cao học và viết luận văn.

Hà Nội, ngày 18 tháng 9 năm 2009

Tác giả

Đỗ Thị Thảo

Chương 1

HỆ ĐẾM

§1. Khái niệm hệ đếm với cơ số bất kỳ

1.1. Mở đầu

Trong cuộc sống hàng ngày chúng ta thường sử dụng các số trong hệ đếm thập phân. Tất cả các số của hệ thập phân được tạo nên từ các chữ số từ 0 đến 9. Hệ đếm thập phân, hay còn gọi là hệ đếm cơ số 10 (decimal system, được viết tắt là **Dec** trên các máy tính điện tử khoa học–*Scientific Calculator*, thường được dịch là máy tính cầm tay hoặc máy tính bỏ túi và máy tính *Calculator* được cài đặt trên *Window*).

Hệ đếm thập phân xuất hiện đầu tiên ở Ấn độ vào thế kỷ 5 sau công nguyên. Đến năm 1202 nhờ tác phẩm *Liber Abaci* của L. Fibonacci, một nhà toán học và thương gia người Ý, thì khoa học Ả rập và hệ đếm cơ số 10 mới được truyền bá vào châu Âu. Với sự phát minh ra nghề in vào thế kỉ 15 thì 10 chữ số mới có hình dạng cố định như hiện nay.

Các số viết trong hệ thập phân gồm 2 phần: Phần nguyên và phần thập phân được ngăn cách bởi dấu phẩy hoặc dấu chấm. Máy tính điện tử và các nước trên thế giới sử dụng dấu chấm, nhưng ở Việt nam thì sử dụng dấu phẩy.

Hệ đếm thập phân chỉ sử dụng 10 ký tự lần lượt là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hệ đếm thập phân là hệ đếm theo quy tắc *vị trí*. Giá trị các ký tự giống nhau hoàn toàn khác nhau nếu nó đứng ở những vị trí khác nhau: gặp 10 thì thêm một nấc (đủ 10 thì thêm 1 đơn vị vào hàng bên trái nó), hay còn gọi là *hệ thập tiến*. Do tính thập tiến người ta biết rằng mỗi chữ số đứng bên trái bằng 10 lần chữ số đứng bên phải nó nếu hai chữ số đó là như nhau. Điều này khác với hệ La Mã.

Người ta cũng cố lý giải tại sao hệ đếm thập phân lại được đa số các nước trên thế giới sử dụng đến như vậy. Có nhiều lý giải đưa ra như do hai bàn tay có 10 ngón, do đó ta dễ dàng đếm trên 10 ngón tay. Và khi đứa trẻ đầu tiên tập đếm thì chúng thường đếm trên đầu các ngón tay.

Ngoài hệ đếm thập phân liệu còn có các hệ đếm khác hay không? Chúng ta cùng nhìn lại một chút về các hệ đếm với cơ số khác nhau mà các nước, các dân tộc trên thế giới đã sử dụng.

Hệ đếm cơ số 60 của người Babilon xuất hiện sớm và cho đến ngày nay chúng ta vẫn dùng để đo góc và thời gian: Một độ có 60 phút, một phút có 60 giây,… Tại sao người Babilon lại thích sử dụng hệ đếm cơ số 60 đến như vậy? Cho đến nay có nhiều giả thuyết khác nhau về vấn đề này. Một giải thích là do sự hiểu biết của người Babilon về hệ mặt trời: Người Babilon đã quan sát thấy chu kì của trái đất quay quanh mặt trời là 360 ngày. Có giả thuyết cho rằng vì 60 có nhiều ước số: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 nên khi thực hiện phép chia thì sẽ thu được nhiều số chẵn (nguyên). Còn số 10 chỉ có 2 ước là 2 và 5 nên khi thực hiện phép chia thì sẽ thu được nhiều số lẻ (phân số). Để biểu diễn số trong hệ đếm cơ số 60 thì ta phải sử dụng 60 ký tự. Và trong hệ đếm này thì mỗi chữ số đứng bên trái bằng 60 lần chữ số đứng ngay bên phải nó nếu hai chữ số đó giống nhau.

Hệ đếm cơ số 5 Thời cổ đại các bộ tộc nguyên thủy thường dùng hệ đếm cơ số 5, nó tương ứng với việc đếm trên năm ngón tay. Ở hệ đếm này thì cứ được 5 thì thêm một nấc (đủ 5 thì thêm một đơn vị vào hàng bên trái nó). Như vậy trong hệ đếm cơ số 5 người ta phải sử dụng 5 ký tự 0, 1, 2, 3, 4. Và cũng giống ở các hệ đếm khác, mỗi chữ số đứng bên trái bằng 5 lần chữ số đứng bên phải nó nếu hai chữ số đó giống nhau. Hiện nay người Trung Quốc và người Nhật Bản vẫn còn dùng các bàn tính gẩy dựa trên hệ đếm cơ số 5.

Hệ đếm cơ số 20 Có những dân tộc dùng cả 10 ngón chân và 10 ngón tay để đếm và được 20 thì họ thêm một nấc (đủ 20 thì thêm một đơn vị vào hàng bên trái nó). Chính vì vậy mà có hệ đếm cơ số 20. Hệ đếm này được người Maia cổ sử dụng. Cho đến ngày nay ở Đan Mạch và ở Pháp người ta vẫn sử dụng hệ đếm cơ số 20. Với họ 60 được hiểu là 3 lần 20; 80 được hiểu là 4 lần 20 (quatre vingts-quatre=bốn, vingt=20 tiếng Pháp); 90 được hiểu là 4 lần 20 rưỡi; 93 được hiểu là thêm 3 vào 4 lần 20 rưỡi.

Cách nói đơn vị trước khi nói hàng chục trước thế kỷ 18 rất phổ biến ở châu Âu, cho đến nay ở Đức vẫn còn sử dụng.

Ở hệ đếm cơ số 20 ta phải sử dụng 20 chữ số, ngoài các chữ số từ 0 đến 9 người ta còn đưa vào các chữ cái thay cho các giá trị số từ 10 đến 19. Và cũng giống ở các hệ đếm trên thì mỗi chữ số đứng bên trái bằng 20 lần chữ số đứng bên phải nó nếu 2 chữ số đó giống nhau.

Trong đo lường người ta còn sử dụng nhiều hệ đếm khác nữa.

Hệ đếm cơ số 12 được sử dụng ở nhiều nước trên thế giới và cho đến ngày nay vẫn được sử dụng nhiều ở Anh, và nhiều nơi trên thế giới cũng vẫn còn sử dụng hệ đếm cơ số 12. Một thước Anh không phải là 10 tấc Anh mà là 12 tấc Anh. Chúng ta vẫn hay dùng đơn vị inch, 18 inch không phải là một thước và 8 tấc mà là một thước Anh và 6 tấc Anh. Ở Anh người ta còn dùng đơn vị “tá” gồm 12 chiếc, 12 “tá” gọi là một “rá”. Có lẽ người Trung Quốc cũng đã sử dụng hệ đếm cơ số 12 và hệ đếm cơ số 60 (chu kì của 12 con giáp,…).

Tùy theo yêu cầu thực tế mà người ta lại dùng các hệ đếm với cơ số mới.

Hệ đếm cơ số 2 hay hệ đếm nhị phân (binary system, được viết tắt là **Bin** trên các máy tính khoa học và máy tính *Caculator* được cài đặt trên *Window*). Khi máy tính điện tử xuất hiện, người ta sử dụng hệ đếm nhị phân. Đó là hệ đếm chỉ sử dụng hai ký tự 1 và 0. Mỗi ký tự đứng bên trái bằng hai lần ký tự đứng bên phải nó nếu các ký tự đó là như nhau. Việc sử dụng hệ đếm nhị phân với hai ký tự 0 và 1 rất gần với logic vì mệnh đề chỉ có thể nhận một trong hai giá trị đúng hoặc sai tương ứng với giá trị 1 hoặc 0. Nó cũng tương ứng với việc một mạch điện chỉ có thể ở một trong hai trạng thái đóng hoặc mở. Phép đếm nhị phân cùng với phép toán logic là cơ sở hoạt động của máy tính.

Do chỉ có hai ký tự nên việc biểu diễn của một số trong hệ đếm cơ số 2 rất dài, vì vậy trong máy tính còn sử dụng hệ đếm cơ số 8 và hệ đếm cơ số 16, rất thuận tiện trong biểu diễn các số vì 2 là ước của 8 và 16.

Hệ đếm cơ số 8 hay hệ bát phân (octal system, được viết tắt là **Oct** trên các máy tính khoa học và máy tính *Caculator*). Đây là hệ đếm sử dụng 8 ký tự 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7. Mỗi ký tự đứng bên trái bằng 8 lần ký tự đứng bên phải nó nếu hai ký tự đó giống nhau.

Hệ đếm cơ số 16 (hexadecimal system, được viết tắt là **Hex** trên các máy tính khoa học và *Caculator*). Nếu chỉ sử dụng 10 ký tự từ 0 đến 9 như ở hệ đếm thập phân thì chưa đủ để biểu diễn các số trong hệ đếm cơ số 16. Vì vậy người ta đưa thêm vào các ký tự: A, B, C, D, E, F tương ứng với 10, 11, 12, 13, 14, 15. Như vậy ở hệ đếm này ta sử dụng 16 ký tự: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Mỗi ký tự đứng bên trái bằng 16 lần ký tự đứng bên phải nó nếu hai ký tự đó giống nhau.

Thực ra thì hệ đếm cơ số 16 cũng đã có ở Trung Quốc từ xưa, vì thời trước 1 cân của Trung Quốc có tới 16 lạng (bên tám lạng bên nửa cân, bằng nhau).

Hệ đếm cơ số 24 dùng đếm số giờ trong 1 ngày.

Hệ đếm cơ số 30 đếm số ngày trong tháng.

Hệ đếm cơ số 3 (hệ tam phân) gồm ba chữ số 0, 1, 2 hay 0, 1, $\overline{1}$. Hệ đếm cơ số 3 dùng để đếm số tháng trong quí. Có dân tộc đã sử dụng hệ đếm cơ số 3 trong thời gian dài. Với những số lớn hơn 3 thì họ dùng từ vài hoặc nhiều. Do tính chất đối xứng nên hệ đếm cơ số 3 có nhiều tính chất thú vị và tiện dụng trong nghiên cứu, vì vậy ở một số phòng thí nghiệm đặc biệt người ta sử dụng máy tính mà thiết kế dựa trên cơ số 3. Tuy nhiên loại máy tính này ít được sử dụng rộng rãi.

Hệ đếm cơ số 7 đếm số ngày trong tuần,…

Như vậy có thể khái quát rằng: chúng ta có thể đếm hoặc viết các số theo một cơ số hay một quy tắc nào đó.

Từ đây ta có thể hiểu một số được viết theo cơ số k có nghĩa là gì? Giá trị thập phân của nó là bao nhiêu?

1.2. Hệ đếm với cơ số bất kỳ

Định nghĩa

Cho b là số hữu tỷ dương, k là số tự nhiên, nếu b có dạng

$$b = b_n \times k^n + b_{n-1} \times k^{n-1} + \ldots + b_1 \times k^1 + b_0 \times k^0 + b_{-1} \times k^{-1} + b_{-2} \times k^{-2} + \ldots + b_{-m} \times k^{-m}$$

$\left(0 \le b_i \le k-1; b_n \ge 0; i = \overline{-m,n}\right)$ *thì b là số được viết trong hệ đếm cơ số k là:*

$$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-m})_k,$$

trong đó k là cơ số của hệ đếm, b_i $(i = \overline{-m;n})$ là các chữ số của b, $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$ là phần nguyên, $b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-m}$ là phần lẻ (được gọi là phần phân).

Thí dụ

1. $(2354.12)_{10} = 2\times10^3 + 3\times10^2 + 5\times10^1 + 4\times10^0 + 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$;

2. $(2354.12)_6 = 2\times6^3 + 3\times6^2 + 5\times6^1 + 4\times6^0 + 1\times6^{-1} + 2\times6^{-2} = \left(\dfrac{20671}{36}\right)_{10}$;

3. $(3576587612356123)_9 = 3\times9^{15} + 5\times9^{14} + 7\times9^{13} + 6\times9^{12} + 5\times9^{11} + 8\times9^{10}$
   $+ 7\times9^9 + 6\times9^8 + 1\times9^7 + 2\times9^6 + 3\times9^5 + 5\times9^4 + 6\times9^3 + 1\times9^2 + 2\times9^1 + 3\times9^0$
   $= (751732772433382)_{10}$;

4. $(3576587612356123)_{12} = 3\times12^{15} + 5\times12^{14} + 7\times12^{13} + 6\times12^{12} + 5\times12^{11} + 8\times12^{10} +$
   $7\times12^9 + 6\times12^8 + 1\times12^7 + 2\times12^6 + 3\times12^5 + 5\times12^4 + 6\times12^3 + 1\times12^2 + 2\times12^1 + 3\times12^0$
   $= (53447355208631113)_{10}$;

Từ thí dụ trên ta thấy hai số viết bởi những chữ số như nhau trong hệ đếm cơ số khác nhau thì giá trị thập phân của nó hoàn toàn khác nhau, ta cũng dễ dàng chứng minh được số viết như nhau trong hệ đếm với cơ số lớn hơn thì giá trị thập phân của nó lớn hơn. Và trong một số thì những chữ số giống nhau đứng ở những vị trí khác nhau thì có giá trị hoàn toàn khác nhau.

Như vậy khi viết các số dù ở hệ đếm cơ số nào thì nó cũng bao gồm hai phần: *phần nguyên* và *phần phân* (hay còn gọi là *phần lẻ*), giữa hai phần ấy được ngăn cách với nhau bởi dấu "," hoặc dấu ".". Phần đứng bên trái của dấu "," hoặc "." được gọi là *phần nguyên*, phần đứng bên phải của dấu "," hoặc "." được gọi là *phần lẻ* hay *phần phân*. Nếu số có phần lẻ bằng 0 thì không cần dùng dấu "," hoặc "." nữa và số đó gọi là *số nguyên*.

Nếu số b viết trong hệ đếm cơ số 10 thì không cần viết cơ số kèm theo.

Vấn đề đặt ra là nếu ta có số b viết trong hệ đếm cơ số k thì ta có thể chuyển nó sang các hệ đếm với cơ số khác được hay không? Làm thế nào để đổi biểu diễn của nó từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác?

§2. Qui tắc đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác

Việc chuyển biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác dựa trên các định lý sau.

Định lý 2.1

Cho b và k là những số tự nhiên. Khi đó tồn tại duy nhất các số tự nhiên a, r với $0 \le a < b;\ 0 \le r < k$, sao cho $b = ka + r$.

Nếu b chia hết cho a thì $r = 0$.

Chứng minh

Nếu $b < k$ thì $a = 0;\ 0 \le r = b < k$.

Nếu $b \ge k$. Theo tiên đề Archimedus tồn tại số a sao cho $ka \le b \le (a+1)k$.