ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ BÌNH

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số:60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HOC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. Phan Huy Khải

THÁI NGUYÊN, NĂM 2009

Lời nói đầu

Hình học tổ hợp là một nhánh không thể thiếu được của các bài toán tổ hợp nói chung, nó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi ở mọi cấp. Khác với các bài toán trong lĩnh vực Giải tích, Đại số, Lượng giác, các bài toán của hình học tổ hợp thường liên quan nhiều đến các đối tượng là các tập hợp hữu hạn. Vì lẽ đó các bài toán này mang đặc trưng rõ nét của toán học rời rạc. (Ít sử dụng đến tính liên tục - một tính chất đặc trưng của bộ môn giải tích).

Luận án này đề cập đến các phương pháp chính để giải các bài toán về hình học tổ hợp. Ngoài phần mở đầu, danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm ba chương.

Chương I áp dụng Nguyên lí cực hạn vào giải các bài toán hình học tổ hợp là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác, đặc biệt nó có ích khi giải các bài toán tổ hợp nói chung và hỗn hợp tổ hợp nói riêng. Nguyên lí này dùng để giải các bài toán mà trong đối tượng phải xét của nó tồn tại các giá tri lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo một nghĩa nào đó và kết hợp với những bài toán khác đặc biệt là phương pháp phản chứng, tập hợp các giá trị cần khảo sát chỉ là tập hợp hữu hạn hoặc có thể vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất.

Chương II Nguyên lí Dirichlet: là một trong những phương pháp thông dụng và hiệu quả để giải các bài toán hình học tổ hợp. Nguyên lí Dirichlet còn là một công cụ hết sức nhạy bén có hiệu quả cao dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Dùng nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại của một đối tượng với tính chất xác định. Tuy rằng với nguyên lí này ta chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại đã đủ.

Chương III Sử dụng tính lồi của tập hợp để áp dụng vào các bài toán tổ hợp, trong chương này chúng ta đề cập đến hai kết quả hay sử dụng nhất đó là định lí Kelli về tính giao nhau của các tập hợp lồi và sử dụng phép lấy bao lồi để giải các bài toán hình học tổ hợp là một trong những phương pháp rất hữu hiệu.

Phần còn lại của luận văn được trình bày vài phương pháp khác để giải các bài toán hình học tổ hợp.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và chỉ bảo của thầy giáo PGS.TS Phan Huy Khải. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo Khoa Toán Trường Đại học Khoa học, các thầy các cô đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại trường.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 9 năm 2009

Tác giả

Lê Thị Bình

Mục lục

Chương I: NGUYÊN LÍ CỰC HẠN

Nguyên lí 1: Trong tập hợp hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Nguyên lí 2: Trong một tập hợp khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Sử dụng nguyên lí cực hạn là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác, đặc biệt nó có ích khi giải các bài toán tổ hợp nói chung và hỗn hợp tổ hợp nói riêng. Nguyên lí này dùng để giải các bài toán mà trong tập hợp những đối tượng phải xét của nó tồn tại các giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo một nghĩa nào đó. Nguyên lí cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng, được vận dụng trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát chỉ là tập hợp hữu hạn (Nguyên lí 1) hoặc có thể vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất. (Nguyên lí 2). Để sử dụng nguyên lí cực hạn giải các bài toán hình học tổ hợp, người ta thường dùng một lược đồ chung để giải sau:

- Đưa bài toán đang xét về dạng có thể sử dụng nguyên lí 1 (hoặc nguyên lí 2) để chứng tỏ rằng trong tất cả các giá trị cần khảo sát của bài toán cần có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất), xét bài toán tương ứng khi nó nhận giá lớn nhất (nhỏ nhất).

-Chỉ ra mâu thuẫn, hoặc đưa ra giá trị còn lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) mà ta đang khảo sát.

Theo nguyên lí của phương pháp phản chứng, ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.

Các ví dụ được trình bày dưới đây sẽ minh hoạ cho phương pháp này.

Ví dụ 1.1: Trên một đường thẳng đánh dấu n điểm khác nhau $A_1, A_2, \dots, A_n$ theo thứ tự từ trái qua phải ($n \geq 4$). Mỗi điểm được tô bằng một trong 4 màu khác nhau và cả bốn màu đều được dùng. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng chứa đúng hai điểm của hai màu và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại.

Giải: Xét tập hợp sau:

$A = \{ k \mid 1 \leq k \leq n \}$.

Tập $A \neq \varnothing$ (vì theo giả thiết dùng cả bốn màu) và A hữu hạn nên theo nguyên lí cực hạn, tồn tại chỉ số i nhỏ nhất mà $i \in A$.

Theo định nghĩa của tập hợp A, vì do ***i*** là chỉ số bé nhất thuộc A, nên màu của điểm A_i sẽ khác với màu của tất cả các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

Chú ý rằng bây giờ trong dãy $A_1, A_2, \ldots, A_i$ lại có đủ bốn màu.

Xét tiếp tập sau:

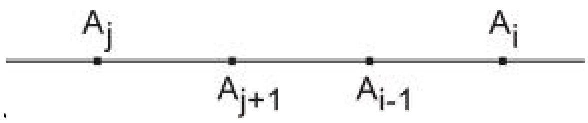
$B = \{k \mid 1 \leq k \leq i$ và giữa các điểm $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_i$ có mặt đủ bốn màu$\}$.

Tập $B \neq \varnothing$ (vì dãy $A_1, A_2, \ldots, A_i$ có đủ bốn màu),

và B hữu hạn nên theo nguyên lí

cực hạn, tồn tại chỉ số j lớn nhất mà

Theo định nghĩa của tập hợp B, và d



H - 1.1

j là chỉ số lớn nhất thuộc B, nên màu của điểm A_j sẽ khác với màu của tất cả các điểm $A_{j+1}, \ldots, A_i$.

Xét đoạn $[A_j A_i]$. Khi đó đoạn thẳng này chứa đúng hai điểm của hai màu (đó là A_j và A_i), và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại $A_{j+i}, \ldots, A_{i-1}$.□

<u>Ví dụ 1.2:</u> Cho ABC là tam giác nhọn. Lấy một điểm P bất kì trong tam giác.

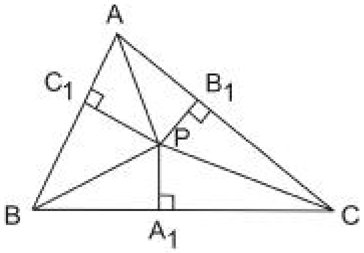
Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P tới ba điểm A , B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ P tới ba cạnh của tam giác đó.

Giải: Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là hình chiếu của P xuống BC, AC, AB.

Ta có: $A\hat{P}C_1 + C_1\hat{P}B + B\hat{P}A_1 + A_1\hat{P}C + C\hat{P}B_1 + B_1\hat{P}A = 360^o$. (1)

Theo nguyên lí cực hạn, tồn tại:

$\max\left\{\widehat{APC_1}, \widehat{C_1PB}, \widehat{BPA_1}, \widehat{A_1PC}, \widehat{CPB_1}, \widehat{B_1PA}\right\} = \widehat{BPA_1}$. (2)



H - 1.2

Từ (1) và (2) dễ suy ra: $\widehat{PBA_1} \geq 60^o$ (3)

Từ (3) ta đi đến cos $\widehat{PBA_1} = \dfrac{PA_1}{PB} \leq \dfrac{1}{2}$.

Như vậy $PB \geq 2PA_1$. (4)

Từ (4) suy ra max $\{PA, PB, PC\} \geq PB \geq 2PA_1 \geq 2\min\{PA_1, PB_1, PC_1\}$. □

<u>Ví dụ 1.3:</u> Chứng minh rằng trên mặt phẳng toạ độ, không thể tìm được năm điểm nguyên là đỉnh của một ngũ giác đều.

(Một điểm $M(x\ ;\ y)$ trên mặt phẳng toạ độ được gọi là "điểm nguyên" nếu cả hai toạ độ x , y của nó đều là những số nguyên).

Giải: Giả thiết trái lại, tồn tại một ngũ giác đều sao cho năm đỉnh của nó đều là những "điểm nguyên".Ta xét tập hợp sau:

$\Omega = \{a^2 \mid a$ là cạnh của ngũ giác đều có năm đỉnh là các "điểm nguyên"$\}$.

Dễ thấy, do a là cạnh của ngũ giác đều với các đỉnh nguyên nên a^2 là số nguyên dương.

Thật vậy, giả sử $A_1A_2A_3A_4A_5$ là đa giác đều thuộc Ω. Giả sử $A_i\ (x_i\ ;\ y_i)$, $i = \overline{1,5}$, thì nếu gọi a là cạnh của ngũ giác đều này, ta có:

$$a^2 = A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Do $x_i , y_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = \overline{1,5}$ nên a^2 là số nguyên dương. Như thế tập $\Omega \neq \varnothing$, điều này suy ra từ giả thiết phản chứng.

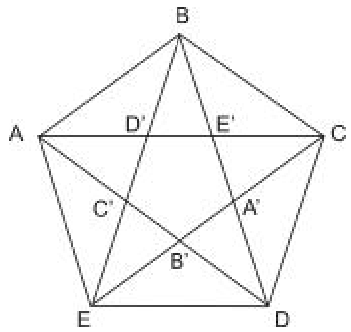
Tập Ω các số tự nhiên, khác rỗng, nên theo nguyên lí cực hạn suy ra tồn tại phần tử nhỏ nhất, tức là tồn tại ngũ giác đều $ABCDE$ sao cho a_*^2 là nhỏ nhất, ở đây a_* là cạnh của ngũ giác đều này. Dễ thấy $ABCB'$; $BCDC'$; $CDED'$;

DEAE' và *AEBA'* đều là các hình bình hành với $BD \cap CE = A'$, $AD \cap CE = B'$, $AD \cap BE = C'$, $AC \cap BE = D'$,$AC \cap DE = E'$.

Từ hình bình hành *EABA'* suy ra:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_B + x_E - x_A \\ y_{A'} = y_B + y_E - y_A \end{cases} \qquad (1)$$

Do *A, B, C, D, E* là các "điểm nguyên" nên x_A, x_E, x_B ; y_A, y_E, y_B đều là các số nguyên. Vì thế (1) suy ra $x_{A'}$, $y_{A'}$ cũng là các số nguyên. Như thế *A'* là "điểm nguyên". Tương tự *B'* , *C'* , *D'* , *E'* cũng là các "điểm nguyên" Rõ ràng *A'B'C'D'E'* là ngũ giác đều với các đỉnh của nó đều là các "điểm nguyên",



H-1.3

tức là $A'B'C'D'E' \in \Omega$. Mặt khác, nếu gọi *a'* là cạnh của ngũ giác đều, thì rõ là:

$$a' < a_* \Rightarrow a'^2 < a_*^2 . \qquad (2)$$

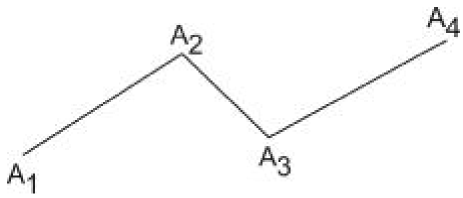
Bất đẳng thức (2) mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của a_*. Vậy giả thiết phản chứng là sai. Như thế không tồn tại một ngũ giác đều với các đỉnh đều là "điểm nguyên".

<u>Ví dụ 1.4:</u> Trên mặt phẳng cho 2005 điểm, khoảng cách giữa các điểm này đôi một khác nhau. Nối điểm nào đó trong số các điểm này với điểm gần nhất. Cứ tiếp tục như thế. Hỏi với cách nối đó có thể nhận được một đường gấp khúc khép kín không?

Giải: Giả sử xuất phát từ một điểm A_1 bất kỳ. Theo nguyên lí cực hạn, trong số tất cả các đoạn thẳng có đầu mút A_1 thì tồn tại điểm gần A_1 nhất. Điểm này là duy nhất, vì theo giả thiết khoảng cách giữa các điểm là khác nhau khi cặp điểm khác nhau. Gọi điểm này là A_2. Tiếp tục xét như vậy với các đoạn thẳng xuất phát từ A_2. Có hai khả năng xảy ra:

1.Nếu A_1 là điểm gần A_2 nhất. Khi đó đường gấp khúc dừng lại ngay tại A_2. Rõ ràng ta thu được đường gấp khúc với một khúc A_1A_2 và dĩ nhiên nó không khép kín.

2.Nếu tồn tại duy nhất điểm A_3 và A_2A_3 là ngắn nhất. Khi đó ta có đường gấp khúc $A_1A_2A_3$ với $A_1A_2 > A_2A_3$.



H –1.4

Giả sử đã có đường gấp khúc $A_1A_2\ldots A_n$ và theo lập luận trên ta có:

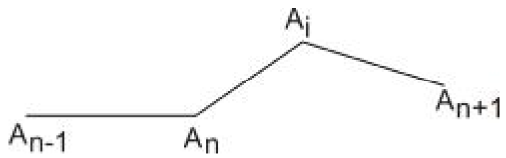
$$A_1A_2 > A_2A_3 > \ldots > A_{n-1}A_n.$$

Chú ý rằng điểm A_n không thể nối được với điểm A_i nào đó mà $1 \leq i \leq n-2$. Thật vậy nếu trái lại ta nối được A_n với A_i (ở đây $1 \leq i \leq n-2$). Theo định nghĩa về cách nối điểm ta được:

$$A_nA_i < A_{n-1}A_n < A_iA_{i+1}. \quad (1)$$

Nhưng theo cách nối từ A_i ta lại có:

$$A_iA_{i+1} < A_nA_i. \quad (2)$$



H -1.5

Từ (1) và (2) suy ra vô lí. Vậy không bao giờ đường khấp khúc $A_1A_2\ldots A_n$ là khép kín.

Ta có câu trả lời phủ định: Không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín, nếu nối theo quy tắc trên.

Ví dụ 1.5: Cho các số nguyên m, n với $m < p$, $n < q$ cho $p \times q$ số thực đôi một khác nhau. Điền các số đã cho vào các ô vuông con của bảng ô vuông kích thước $p \times q$ (gồm p hàng, q cột) sao cho mỗi số được điền vào một ô và mỗi ô được điền vào một số. Ta gọi một ô vuông con của bảng là ô "xấu" nếu số nằm ô đó bé hơn ít nhất m số nằm cùng cột với nó và đồng thời bé ít nhất n

số nằm cùng hàng với nó. Với mỗi cách điền số nói trên, gọi s là số ô "xấu" của bảng số nhận được. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của s.

Giải: Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$s \geq (p-m)(q-n) \qquad (1)$$

Ta quy nạp theo số $p + q$.

- Nếu $p + q = 2$, tức $p = q = 1$ (bảng có duy nhất một số). Khi đó kết luận của bài toán là đúng (hiểu theo nghĩa ở đây m , n không có hoặc có thể hiểu theo nghĩa không có trường hợp này).
- Tương tự $p + q = 3$.
- Với $p + q = 4 \Rightarrow p = q = 2$ và $m = n = 1$.

Xét một cách điền bất kì bốn số đôi một khác a, b, c, d .

Không giảm tổng quát có thể cho là $a < b < c < d$ (nếu không lí luận tương tự).

a	b
c	d

Ô có số a là ô "xấu" (vì nó bé hơn một số nằm cùng cột và một số nằm cùng hàng, và chỉ có ô đó là "xấu" mà thôi). Ta có $s = 1$.

Mặt khác, trong trường hợp này: $(p-m)(q-n) = (2-1)(2-1) = 1$.

Kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.

Giả thiết quy nạp kết luận của bài toán đúng đến $p + q = k$

(ở đây $p > m$, $q > n$) , tức là trong trường hợp này số ô "xấu " lớn hơn hoặc bằng $(p-m)(p-n)$.

- Xét khi bảng $p \times q$ có $p + q = k + 1$.

Ta gọi một ô vuông con của bảng là "xấu theo hàng" ("xấu theo cột") nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất n số (tương ứng m số) nằm cùng hàng (tương ứng nằm cùng cột) với nó.