ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG THẢO

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN CỦA HÀM CHỈNH HÌNH TÁCH

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60. 46. 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai

THÁI NGUYÊN - 2012

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

Thác triển ánh xạ chỉnh hình là một trong những hướng nghiên cứu cơ bản của giải tích phức nhiều biến. Hướng nghiên cứu này đã được rất nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu từ rất lâu và đã thu được nhiều kết quả quan trọng. Đến cuối thế kỷ 20 đầu thế kỷ 21, bài toán thác triển ánh xạ chỉnh hình tách qua các tập chữ thập được quan tâm nghiên cứu. Cụ thể là:

Cho $D_j \subset \mathbb{C}^{k_j}$ *là miền giả lồi,* $A_j \subset D_j$ *là tập đa cực địa phương,* $j = 1,\dots,N$. *Đặt*

$$X := \bigcup_{j=1}^{N} A_1 \times \dots \times A_{j-1} \times D_j \times A_{j+1} \times \dots \times A_N \subset \mathbb{C}^{k_1+\dots+k_N}.$$

Nếu U *là lân cận mở liên thông của* X, $M \subsetneq U$ *là tập con giải tích thì tồn tại một tập con giải tích* $\hat{M}$ *của bao chỉnh hình* $\hat{X}$ *của* X *thỏa mãn* $\hat{M} \cap X \subset M$.

Vào các năm 1998, 1999, O. Oktem và sau đó là Siciak (2000) đã chứng minh được kết quả sau:

Cho hàm f *chỉnh hình tách trên* $X \setminus M$*, tồn tại* $\hat{f}$ *chỉnh hình trên* $\hat{X} \setminus \hat{M}$ *thỏa mãn* $\hat{f}|_{X \setminus M} = f$.

Năm 2001, M. Jarnicki, P. Pflug đã chứng minh được định lý sau:

Cho $D_j \subset \mathbb{C}^{k_j}$ *là miền giả lồi,* $A_j \subset D_j$ *là các tập đa chính quy địa phương,* $j = 1,\dots,N$. *Cho* $M \subsetneq U$ *là tập một con giải tích của một lân cận mở liên thông* U *của* $X = \Xi(A_1,\dots,A_N; D_1,\dots,D_N)$ *(*M *có thể bằng rỗng). Khi đó tồn tại một tập con giải tích đối chiều một thuần túy* $\hat{M} \subset \hat{X}$ *sao cho:*

* $\hat{M} \cap U_0 \subset M$ *với một lân cận mở* U_0 *của* X, $U_0 \subset U$,

* *Với mọi* $f \in \mathcal{O}_s(X \setminus M)$ *tồn tại đúng một hàm* $\hat{f} \in \mathcal{O}(\hat{X} \setminus \hat{M})$ *sao cho* $\hat{f}|_{X \setminus M} = f$

Hơn nữa, nếu $U = \widehat{X}$*, thì ta có thể lấy* $\widehat{M}$ *là hợp của tất cả các thành phần bất khả quy đối chiều một của* M.

Định lý này có thể xem như là một tổng quát hóa kết quả nghiên cứu của J. Siciak (2000) trong trường hợp $N \geq 2$, $k_1 = \ldots = k_N = 1$, $D_1 = \ldots = D_N = \mathbb{C}$, $M = P^{-1}(0)$, trong đó P là một đa thức N biến phức khác không. Đặc biệt, với $M = \varnothing$, $N = 2$ kết quả của M. Jarnicki, P. Pflug chính là kết quả của O. Alehyane - A. Zeriahi (2001).

Với mục đích tìm hiểu một số định lý thác triển của các hàm chỉnh hình tách. Luận văn tập trung nghiên cứu các kết quả nghiên cứu của M. Jarnicki, P. Pflug (2001). Vì vậy nội dung luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan đến nội dung chính của luận văn như: Đa tạp phức, hàm đa điều hòa dưới, tập đa cực, tập đa chính quy địa phương, chữ thập N - lá, hàm chỉnh hình tách, … Phần cuối chương 1 là một số kết quả liên quan như Nguyên lý đồng nhất, Định lý hàm ẩn, Định lý Dloussky, Định lý Grauert - Remmert.

Chương 2: Một số định lý thác triển của các hàm chỉnh hình tách.

Trong chương này chúng tôi trình bày lại các kết quả nghiên cứu của Marek Jarnicki - Peter Pflug (2001). Cụ thể là các định lý về thác triển ánh xạ chỉnh hình tách.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo T.S Nguyễn Thị Tuyết Mai. Nhân dịp này, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với cô.

Em xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên cùng các thầy cô đã tận tình giảng dạy chúng em trong suốt khóa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp, các học viên lớp Cao học Toán K18A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình hoàn thành, bảo vệ luận văn này.

Thái nguyên, tháng 04 năm 2012

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Phương Thảo

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Đa tạp phức

1.1.1. Ánh xạ chỉnh hình

1.1.1.1. Định nghĩa

Giả sử X là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $f: X \to \mathbb{C}$ là một hàm số.

Hàm f được gọi là *khả vi phức* tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $\lambda: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\left|f(x_0+h)-f(x_0)-\lambda(h)\right|}{|h|} = 0$$

trong đó $h = (h_1,...,h_n) \in \mathbb{C}^n$ và $|h| = \left(\sum_{i=1}^{n} |h_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.1.1.2. Định nghĩa

Hàm f được gọi là *chỉnh hình tại* $x_0 \in X$ nếu f khả vi phức trong

một lân cận nào đó của x_0 và được gọi là chỉnh hình trên X nếu f chỉnh hình tại mọi điểm thuộc X.

Một ánh xạ $f: X \to \mathbb{C}^m$ có thể viết dưới dạng $f = (f_1,...,f_m)$, trong đó $f_i = \pi_i \circ f: X \to \mathbb{C}, i = 1,...,m$ là các hàm tọa độ. Khi đó f được gọi là chỉnh hình trên X nếu f_i chỉnh hình trên X với mọi $i = 1,...,m$.

1.1.1.3. Định nghĩa

Ánh xạ $f: X \to f(X) \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là song chỉnh hình nếu f là song ánh chỉnh hình và f^{-1} cũng là ánh xạ chỉnh hình.

1.1.2. Đa tạp phức

1.1.2.1. Định nghĩa

Giả sử X là một không gian tô pô Hausdorff. Cặp (U,φ) được gọi là *một bản đồ địa phương* của X, trong đó U là tập mở trong X và $\varphi: U \to \mathbb{C}^n$ là ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i, $\varphi(U)$ là tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

ii, $\varphi: U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

1.1.2.2. Định nghĩa

Họ $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một *tập bản đồ giải tích(atlats)* của X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

i, $\{U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của X.

ii, Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, ánh xạ $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ tập các bản đồ trên X. Hai bản đồ A_1, A_2 được gọi là tương đương nếu hợp $A_1 \cup A_2$ là một bản đồ. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlats. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên X, và X cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một đa tạp phức n chiều.

1.2. Hàm đa điều hòa dưới trên không gian phức, miền giả lồi

1.2.1. Hàm điều hòa dưới

1.2.1.1. Định nghĩa

Giả sử D là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Hàm $u : D \to [-\infty, +\infty)$, $u \neq -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của D được gọi là *điều hòa dưới* trong D nếu u thỏa mãn hai điều kiện sau:

i, u là nửa liên tục trên trong D, tức là $\lim\limits_{z\to z_0} \sup u(z) \leq u(z_0)$ với $\forall z_0 \in D$.

ii, Với mỗi tập con mở compact tương đối G của D, với mỗi hàm $h : G \to \mathbb{R}$ điều hòa trong G và liên tục trên $\overline{G}$: nếu $u \leq h$ trên ∂G thì $u \leq h$ trên G.

Ký hiệu $\Sigma H(D)$ là tập các hàm đều hòa dưới trên Ω.

1.2.1.2. Định nghĩa

Giả sử Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Hàm $\varphi : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là *đa điều hòa dưới* trong Ω nếu:

i, φ là nửa liên tục trên trong Ω và $\varphi \neq -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của Ω.

ii, Với mỗi điểm $z_0 \in \Omega$ và mỗi đường thẳng phức $l(\xi) = z_0 + \omega\xi$ đi qua z_0 (ở đó $\omega \in \mathbb{C}^n, \xi \in \mathbb{C}$), hạn chế φ trên đường thẳng này, tức là hàm $\varphi \circ l(\xi)$ hoặc là điều hòa dưới hoặc $\equiv -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của tập mở $\{\xi \in \mathbb{C} : l(\xi) \in \Omega\}$.

1.2.1.3. Định nghĩa

Giả sử X là không gian phức. Một hàm đa điều hòa dưới trên X là hàm $\varphi : X \to [-\infty, +\infty)$ thỏa mãn: Với mỗi $x \in X$ tồn tại lân cận U của x và một ánh xạ song chỉnh hình $h : U \to V$, với V là một không gian con phức đóng của một miền G nào đó trong $\mathbb{C}^n$ và tồn tại một hàm đa điều hòa dưới $\tilde{\varphi} : G \to [-\infty, +\infty)$ sao cho $\varphi|U = \tilde{\varphi} \circ h$.

Ký hiệu $\Pi\Sigma H(X)$ là tập của tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên không gian phức X.

1.2.2. Miền giả lồi

Định nghĩa: Miền $D \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *giả lồi*, nếu hàm $\varphi(z) = -\ln d(z, \partial D)$, đa điều hòa dưới trong D, trong đó $d(z, \partial D)$ là khoảng cách Ơclit từ điểm z đến biên ∂D.

Ví dụ: Một miền tùy ý trên mặt phẳng $\mathbb{C}$ là giả lồi.

1.3. Tập đa cực, tập đa chính quy địa phương

Ta giả thiết tất cả các đa tạp phức là hữu hạn chiều địa phương (tức là mỗi thành phần liên thông của đa tạp có chiều hữu hạn) và tất cả các không gian giải tích phức đều giả thiết là bất khả quy và hữu hạn chiều.

Giả sử M là đa tạp phức và A là tập con của M. Đặt

$h_{A,M} := \sup\{ u : u \in \Pi\Sigma H(M),\ u \leq 1 \text{ trên } M,\ u \leq 0 \text{ trên } A\}$

1.3.1. Tập đa cực

1.3.1.1. Định nghĩa

Tập A được gọi là *đa cực* trong M nếu có $u \in \Pi\Sigma H(M)$ sao cho u không đồng nhất bằng $(-\infty)$ trên mọi thành phần liên thông của M và $A \subset \{ z \in M: u(z) = -\infty \}$.

1.3.1.2. Định nghĩa

Tập A được gọi là *đa cực địa phương* trong M nếu với mỗi $z \in A$, có một lân cận mở V của z sao cho $A \cap V$ là đa cực trong V.

1.3.1.3. Định nghĩa

Tập A được gọi là *không đa cực* (tương ứng *không đa cực địa phương*) nếu nó không là tập đa cực (tương ứng không là tập đa cực địa phương).

Theo một kết quả cổ điển [[2], §5, §9], nếu M là miền Riemann trên một đa tạp Stein thì $A \subset M$ là đa cực địa phương nếu và chỉ nếu nó đa cực.

1.3.2. Tập đa chính quy địa phương

1.3.2.1. Định nghĩa

Cho hàm $h : M \to \mathbb{R}$, hàm $h^* : M \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$h^*(z) := \lim\ \sup h(w), \qquad z \in M$$

được gọi là *hàm chính quy hóa nửa liên tục trên* của h.

1.3.2.2. Định nghĩa

Tập hợp $A \subset M$ là *đa chính quy địa phương tại một điểm* $a \in \overline{A}$ nếu $h^*_{A \cap U, U}(a) = 0$ với mọi lân cận mở U của a.

1.3.2.3. Định nghĩa

Tập A được gọi là *đa chính quy địa phương* nếu nó đa chính quy địa phương tại mọi điểm $a \in A$.

Ta ký hiệu $A^* = A^*{}_M$ là tập hợp tất cả các điểm $a \in \overline{A}$ mà tại đó A là đa chính quy địa phương. Nếu A không đa cực địa phương thì một kết quả cổ điển của [[2], §5, §6] chỉ ra A^* không đa cực địa phương và $A \setminus A^*$ là đa cực địa phương. Hơn nữa, A^* là đa cực địa phương kiểu Γ_δ (tức là với mỗi $a \in A^*$, có một lân cận mở U của a thỏa mãn $A^* \bigcap U$ là giao đếm được của các tập mở) và A^* là đa chính quy địa phương (tức là $\left(A^*\right)^* = A^*$).

1.4. Chữ thập N - lá, ánh xạ chỉnh hình tách

1.4.1. Chữ thập N - lá

Cho $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$, $\varnothing \neq A_j \subset D_j \subset \mathbb{C}^{k_j}$

Với D_j là một miền, $j = 1,\ldots,N$. Ta định nghĩa chữ thập N - lá

$$X := \Xi\left(A_1,\ldots,A_N; D_1,\ldots,D_N\right)$$

$$:= \bigcup_{j=1}^{N} A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times D_j \times A_{j+1} \times \ldots \times A_N \subset \mathbb{C}^{k_1+\ldots+k_N}.$$

Khi đó, X là tập liên thông.

Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $A \subset \Omega$. Đặt

$$h_{A,\Omega} := \sup\left\{u : u \in \Pi\Sigma H\left(\Omega\right), u \leq 1 \text{ trên } \Omega,\ u \leq 0 \text{ trên } A\right\}$$

trong đó $\Pi\Sigma H\left(\Omega\right)$ là tập các hàm đa điều hòa dưới trên Ω. Đặt

$$w_{A,\Omega} := \lim_{k \to +\infty} h^*_{A \cap \Omega_k, \Omega_k}.$$