ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỒNG THÁI LÂM

XẤP XỈ CẤP HAI CỦA TẬP CHẤP NHẬN ĐƯỢC VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU CẤP HAI

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Đỗ Văn Lưu

THÁI NGUYÊN - 2012

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết các bài toán cực trị. Cho đến nay người ta đã nhận được nhiều kết quả phong phú và đẹp đẽ về các điều kiện tối ưu cấp 1, cấp 2 và các cấp cao cho các bài toán tối ưu trơn và không trơn (xem chẳng hạn [2] - [8], [10]).

Theo hướng nghiên cứu trên chúng tôi chọn đề tài: ***"Xấp xỉ cấp hai của tập chấp nhận được và điều kiện cần tối ưu cấp hai".*** Cụ thể là các điều kiện tối ưu cấp 2 thường được biểu diễn dưới ngôn ngữ các đạo hàm cấp 1, cấp 2 hoặc các đạo hàm suy rộng và các tập tiếp tuyến cấp 1, cấp 2. Khác với các điều kiện cần cấp 2 thông thường, các điều kiện cần tối ưu cấp hai của Kawasaki[7] và Cominetti[5] có thêm một số hạng được xem như đạo hàm cấp 2 của một tập hợp. Các điều kiện cần tối ưu cấp 2 được nghiên cứu dưới hai dạng: gốc và đối ngẫu dưới ngôn ngữ các xâp xỉ cấp 2 của tập chấp nhận được. Trong điều kiện cần cấp 2 đối ngẫu có thêm một số hạng ngoài đạo hàm cấp hai của hàm Lagrange.

Đề tài này có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của luận văn này là trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 của Kawasaki[7] và Cominetti[5] cho bài toán tối ưu khả vi có ràng buộc bao hàm thức và ràng buộc tập. Các điều kiện cần tối ưu cấp 2 được trình bày dưới hai đạng gốc và đối ngẫu. Khác với các điều kiện cần cấp 2 thông thường, các điều kiện cần tối ưu cấp 2 dạng đối ngẫu ở đây có thêm một số hạng ngoài đạo hàm cấp 2 của hàm Lagrange.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau:

- Đọc, dịch tài liệu từ hai bài báo tiếng anh của Kawasaki và Cominetti.
- Sử dụng các kết quả của hai bài báo để xây dựng nội dung luận văn

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng công cụ giải tích hàm, giải tích lồi và các kiến thức của lý thuyết tối ưu.

4. Bố cục của luận văn

Luận văn này bao gồm 60 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 của Kawasaki[7] cho bài toán khả vi có ràng buộc đẳng thức và ràng buộc nón có phần trong khác rỗng dưới ngôn ngữ các đạo hàm cấp 1, cấp 2 và các tập tiếp tuyến cấp 2 dạng gốc và dạng đối ngẫu. Các áp dụng cho bài toán cực tiểu hàm sup cũng được trình bày trong chương này.

Chương 2 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 của Cominetti[5] bằng phương pháp chính quy mêtric cho bài toán khả vi có ràng buộc bao hàm thức và ràng buộc tập. Kết quả về tính chính quy mêtric được sử dụng để tính tập tiếp tuyến cấp 2 của tập chấp nhận được.

Bản luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn, chỉ bảo tận tình của PGS.TS Đỗ Văn Lưu - Viện toán học Việt Nam. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn tận tình đó cùng với những kinh nghiệm truyền đạt cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành bản luận văn.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn Sở GD&ĐT Thái Nguyên, Trung tâm GDTX tỉnh Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi được đi học, cảm ơn trường Đại học sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện để các thầy giáo, cô giáo giảng dạy, cung cấp kiến thức cho khóa học của chúng tôi.

Do thời gian và kiến thức có hạn nên bản luận văn của tôi chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Do đó, tôi rất mong có được sự đóng góp của thầy cô và các bạn để bản luận văn của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1
ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU CẤP HAI CỦA H. KAWASAKI

Chương 1 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp hai của Kawasaki [7] cho bài toán có ràng buộc đẳng thức và ràng buộc nón có phần trong khác rỗng với các hàm thuộc lớp C^2. Các điều kiện cấp hai được trình bày dưới ngôn ngữ các đạo hàm cấp 1, cấp 2 và các tập tiếp tuyến cấp hai dưới hai dạng gốc và đối ngẫu. Trong các điều kiện cấp hai dạng đối ngẫu có thêm một số hạng ngoài đạo hàm cấp hai của hàm Lagrange. Các kết quả được áp dụng cho bài toán cực tiểu hàm sup.

1.1. Xấp xỉ cấp 2 của tập chấp nhận được

Xét bài toán tối ưu

$$(P)\qquad \begin{aligned} &Min\, f(x),\\ &g(x)\in K,\\ &h(x)=0, \end{aligned}$$

trong đó: X, V và W là các không gian Banach,

$f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to V$ và $h: X \to W$ thuộc lớp C^2,

K là nón lồi đóng trong V với phần trong khác rỗng.

1.1.1. Các ràng buộc tích cực

Cho hữu hạn bất đẳng thức ràng buộc

$$g_1(x) \le 0, g_2(x) \le 0, ..., g_m(x) \le 0. \qquad (1.1.1)$$

Ta chỉ cần xét các ràng buộc tích cực tại nghiệm tối ưu $\overline{x}$, tức là

$$g_i(x) \le 0\ \forall i \in I(\overline{x}) := \{j \in \{1,2,...,m\}, g_j(\overline{x}) = 0\}. \qquad (1.1.2)$$

Với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát :

$$g(x) \in K, \qquad (1.1.3)$$

trong đó K là nón lồi đóng với phần trong khác rỗng, khái niệm "tích cực" là không hiện rõ. Ta chú ý rằng có sự khác biệt giữa ràng buộc đẳng thức và ràng buộc bất đẳng thức tổng quát. Gọi I là khoảng đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}$; $C(I)$ là tập các hàm liên tục trên I và $C_+(I) = \{u \in C(I) : u(t) \geq 0, \forall t \in I\}$.

Ta hãy xét trường hợp $K = C_+(I)$. Khi đó (1.1.3) có dạng:

$$g(x)(t) \geq 0,\ \forall t \in I \quad (1.1.4)$$

Ta định nghĩa tập tham số của các ràng buộc tích cực:

$$I(\bar{x}) := \{t \in I; g(\bar{x})(t) = 0\} \quad (1.1.5)$$

Trong trường hợp này, khó khăn khác lại nảy sinh. Giả sử $\bar{x}$ được nhiễu thành $\bar{x} + y$. Khi đó bao hàm thức

$$I(\bar{x} + y) \subset I(\bar{x}) \quad (1.1.6)$$

đúng cho (1.1.2), nếu y đủ nhỏ. Nhưng (1.1.6) không đúng cho (1.1.5), thậm trí nếu y đủ nhỏ. Điều này cho thấy rằng không thể xử lí vô hạn ràng buộc bất đẳng thức theo từng điểm. Trong phần sau ta sẽ đưa vào khái niệm "tích cực" phù hợp với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát.

1.1.2. Xấp xỉ cấp hai của miền chấp nhận được

Cho X và V là các không gian Banach. Cặp chính tắc giữa V và không gian tô pô đối ngẫu V^* của nó được ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Cho ánh xạ $g : X \to V$. Khi đó, $g'(x)$ và $g''(x)$ ký hiệu là đạo hàm Fréchet cấp một và cấp hai tương ứng của g tại x. Hơn nữa, $g''(x)(y,z)$ là ánh xạ song tuyến tính từ X^2 vào V. Toán tử liên hợp của $g'(x)$ được ký hiệu là $g'(x)^*$ được xác định bởi:

$$\langle g'(x)^* v^*, y \rangle = \langle v^*, g'(x) y \rangle \text{ với mọi } v^* \in V^* \text{ và } y \in X.$$

Với mỗi tập A của một không gian Banach, bao nón của A được ký hiệu bởi cone$A$, bao đóng của nó được ký hiệu là $\overline{\text{cone}}\, A$. Ta quy ước $\varnothing + A = \varnothing$.

Định nghĩa 1.1.1

Cho M là tập chấp chận được, nghĩa là

$$M = \{x \in X; g(x) \in K, h(x) = 0\}. \quad (1.1.7)$$

Cho $\overline{x}$ là điểm bất kỳ của M. Khi đó các tập tiếp tuyến cấp một và cấp hai của M tại điểm $\overline{x}$ được định nghĩa như sau:

$$T_1 := \{y \in X : \exists x(s) \in M,\ x(s) = \overline{x} + sy + o(s), \forall s > 0\}, \quad (1.1.8)$$

$$T_2 := \{(y,z) \in X^2 : \exists x(s) \in M,\ x(s) = \overline{x} + sy + s^2 z/2 + o(s^2), \forall s > 0\}, \quad (1.1.9)$$

trong đó o(s) và o(s^2) thỏa mãn $\dfrac{\|o(s)\|}{s} \to 0$ và $\dfrac{\|o(s^2)\|}{s} \to 0\ khi\ s \to 0^+$.

Lát cắt y của T_2 được xác định như sau:

$$T_2(y) := \{z \in X : (y,z) \in T_2\}.$$

Bổ đề 1.1.1 sau đây trả lời cho câu hỏi ta có thể xét tính "tích cực" của ràng buộc bất đẳng thức tổng quát ra sao.

Bổ đê 1.1.1

(i) *Nếu* $y \in T_1$ *thì*

$$g'(\overline{x})y \in \overline{\text{cone}}(K - g(\overline{x})), \quad (1.1.10)$$

$$h'(\overline{x})y = 0. \quad (1.1.11)$$

(ii) *Nếu* $(y,z) \in T_2$, *thì*

$$g'(\overline{x})z + g''(\overline{x})(y,y) \in 2\bigcup_{\delta(\cdot)}\bigcap_{s>0}\{K - g(\overline{x})/s^2 - g'(\overline{x})y/s + \delta(s)B\}, \quad (1.1.12)$$

$$h'(\overline{x})z + h''(\overline{x})(y,y) = 0, \quad (1.1.13)$$

trong đó B là hình cầu đơn vị trong V và phép hợp trong vế phải của (1.1.12) lấy theo tất cả các giá trị $\delta(\cdot)$ *sao cho:*

$$\delta(s) \geq 0\ \ \forall s > 0\ \text{ và } \delta(s) \to 0\ khi\, s \to 0^+. \quad (1.1.14)$$

Chứng minh

Lấy $(y,z)\in T_2$. Khi đó, tồn tại $x(s)\in M$ sao cho

$$x(s)=\bar{x}+sy+s^2z/2+o(s^2).$$

Bằng khai triển Taylor ta có

$$g(x(s))=g(\bar{x})+sg'(\bar{x})y+s^2\{g'(\bar{x})z+g''(\bar{x})(y,y)\}/2+o(s^2).$$

Gọi $\delta(s)=\dfrac{\|o(s^2)\|}{s^2}$ ta có (1.1.12).

Các kết quả khác được chứng minh tương tự. □

Định nghĩa 1.1.2

Với mỗi $u,v\in V$, ta xác định tập $K(u,v)$ như sau:

$$K(u,v):=2\bigcup_{\delta(\cdot)}\bigcap_{s>0}\{K-u/s^2-v/s+\delta(s)B\}, \qquad (1.1.15)$$

trong đó phép hợp được lấy trên tất cả các giá trị $\delta(\cdot)$ thỏa mãn (1.1.14). Để *đơn giản ta ký hiệu $K(g(\bar{x}),g'(\bar{x})y)$ là K(y).*

Nhận xét 1.1.1

Kurcyusz [6] đã thiết lập điều kiện cần cấp một mà không sử dụng quan hệ

$$g'(\bar{x})y\in\overline{\text{cone}}(K-g(\bar{x})), \qquad (1.1.16)$$

nhưng sử dụng

$$g'(\bar{x})y\in\text{cone}(K-g(\bar{x})). \qquad (1.1.17)$$

Trong trường hợp đặc biệt

$$V=\mathbb{R}^m \text{ và } K=\mathbb{R}^m_-:=\{u=(u_1,u_2,...,u_m);u_i\le 0\ \forall i\},$$

ta có

$$\begin{aligned}\overline{\text{cone}}(K-g(\bar{x}))&=\text{cone}(K-g(\bar{x}))\\&=\{v=(v_1,...,v_m);v_i\le 0\forall i\in I(\bar{x})\},\end{aligned}$$

trong đó $I(\bar{x})=\{i;\ g_i(\bar{x})=0\}$. Vì vậy, (1.1.16) và (1.1.17) trùng với điều kiện:

$$g_i^{'}(\overline{x})y \le 0 \quad \forall i \in I(\overline{x}). \tag{1.1.18}$$

Mặt khác, trong trường hợp $K = C_+(I)$, $\mathrm{cone}(K - g(\overline{x}))$ không đóng (xem bổ đề 1.4.1). Do đó, nói chung (1.1.16) và (1.1.17) khác nhau.

Nhận xét 1.1.2

Điều kiện (1.1.16) được đưa ra lần đầu tiên bởi Ben-Tal và Zowe [4].

Nhận xét 1.1.3

Trong trường hợp $K = C_+(I)$, điều kiện (1.1.10) trở thành

$$(g'(x)y)(t) \ge 0 \quad \forall t \text{ thỏa mãn } g(x)(t) = 0.$$

Sử dụng kết quả của bổ đề 1.1.1 ta đi đến định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.3.

$$L_1 := \{y \in X : g'(\overline{x})y \in \overline{\mathrm{cone}}(K - g(\overline{x})), h'(\overline{x})y = 0, \tag{1.1.19}$$

$$L_2 := \{(y,z) \in X^2 : g'(\overline{x})z + g''(\overline{x})(y,y) \in 2K(y), h'(\overline{x})z + h''(\overline{x})(y,y) = 0\},$$
$$L_2(y) := \{z \in X : (y,z) \in L_2\}.$$

(1.1.20)

Khi đó, bổ đề 1.1.1 được phát biểu lại như sau:

$$T_1 \subset L_1 \text{ và } T_2 \subset L_2. \tag{1.1.21}$$

Định nghĩa 1.1.4 *(Robinson).*

Hệ $g(x) \in K,\ h(x) = 0$ (1.1.22)

được gọi là ổn định tại điểm $\overline{x} \in M$ *nếu*

$$0 \in \mathrm{int}\{(g(\overline{x}) + g'(\overline{x})x - k, h'(\overline{x})x) : x \in X, k \in K\}. \tag{1.1.23}$$

Bổ đề 1.1.2

Nếu (1.1.23) đúng thì $T_1 = L_1$ *và* $T_2 = L_2$.

Chứng minh

Lấy $(y,z) \in L_2$. Khi đó tồn tại $u(s) \in B$ và $\delta(s) \ge 0$ sao cho

$$g(\overline{x}) + sg'(\overline{x})y - s^2\delta(s)u(s) + \frac{s^2(g'(\overline{x})z + g''(\overline{x})(y,y))}{2} \in K \quad \text{với mọi } s > 0.$$

Từ kết quả định lý trong [9] suy ra tồn tại một lân cận N của $\overline{x}$ và $R > 0$ sao cho

$$d(x, M) \le R\max\{d(g(x)), K), \|h(x)\|\};\ \forall x \in N,$$

trong đó *d(a , A)* là khoảng cách từ *a* đến *A*.

Với mọi s > 0 đủ nhỏ, $\overline{x} + sy + s^2 z/2 \in N$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned} & d(g(\overline{x} + sy + s^2 z/2), K) \\ & = d\left(g(\overline{x}) + sg'(\overline{x})y + s^2 \frac{g'(\overline{x})z + g''(\overline{x})(y,y)}{2} + o(s^2), K \right) \\ & = d(o(s^2) + s^2\delta(s)u(s), K) = o(s^2). \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $\|h(\overline{x} + sy + s^2 z/2)\| = o(s^2)$. Như vậy,

$$d(\overline{x} + sy + s^2 z/2, M) \le Ro(s^2).$$

Điều này kéo theo $(y, z) \in T_2$ Vì vậy $L_2 = T_2$.

Đặc biệt, $T_1 = T_2(0) = L_2(0) = L_1$. □

Không dễ dàng kiểm tra điều kiện ổn định của Robinson. Do đó ta đưa vào một dạng tương đương của (1.1.23) để có thể kiểm tra dễ hơn.

Định nghĩa 1.1.5

Hệ (1.1.22) được gọi là thỏa mãn điều kiện Mangasarian-Fromovitz tại $\overline{x}$ *nếu*

(i) $h'(\overline{x})$ *là ánh xạ lên,* (1.1.24)

(ii) $\exists x_0 \in X : g(\overline{x}) + g'(\overline{x})x_0 \in \operatorname{int} K,$ (1.1.25)

$h'(\overline{x})x_0 = 0.$ (1.1.26)

Nhận xét 1.1.4

Trong [8] các điều kiện trên được gọi là điều kiện Slater, nhưng ta gọi là điều kiện Mangasarian-Fromovitz, bởi vì trong trường hợp đặc biệt

$X = \mathbb{R}^n$; $K = \mathbb{R}^m$ và $W = \mathbb{R}^l$, các điều kiện (1.1.24)-(1.1.26) có dạng